УДК 515.124.62+515.125

**С. М. Агеев**

# Аксиоматический метод разбиений в теории пространств Небелинга. I. Улучшение связности разбиений

В работе рассматривается пространство Небелинга $N_k^{2k+1}$ – $k$-мерный аналог гильбертова пространства, являющееся топологически полным сепарабельным (т.е. польским) $k$-мерным абсолютным экстензором в размерности $k$ (т.е. $\mathrm{AE}(k)$) и сильно $k$-универсальным пространством. Доказывается гипотеза о том, что перечисленные свойства характеризуют пространства Небелинга $N_k^{2k+1}$ в произвольной конечной размерности $k$. В первой части работы приводится полная система аксиом пространств Небелинга и на ее основе решается проблема улучшения связности разбиений.

Библиография: 29 названий.

## § 1. Введение

Одним из наиболее важных результатов начальной стадии развития теории размерности явилось открытие К. Менгером и Г. Небелингом в координатном пространстве $\mathbb{R}^{2k+1}$ универсальных $k$-мерных пространств $M_k^{2k+1}$ и $N_k^{2k+1}$ для классов $k$-мерных компактных метрических и $k$-мерных польских (т.е. сепарабельных метрических) пространств (см. соответственно [1], [2]). С тех пор роль и значение этих пространств, названных впоследствии в честь первооткрывателей, в современной геометрической топологии неуклонно растет [3]–[5].

Обозначим через $\mathscr{J} \subset \mathbb{R}^1$ пространство иррациональных чисел, а через $\mathscr{C} \subset [0,1]$ – канторово совершенное множество. Пространства Менгера и Небелинга можно определить единообразно с помощью понятия $\Sigma$-произведения. Если через $\Sigma_k^n(X;Y) \subset X^n$, где $Y \subseteq X$, а $k \leqslant n \leqslant \infty$, обозначить подмножество $X^n$, состоящее из точек $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, у которых не более $k$ координат $x_i$ принадлежат дополнению $X \setminus Y$, то $N_k^{2k+1}$ есть $\Sigma_k^{2k+1}(\mathbb{R}^1; \mathscr{J})$, а $M_k^{2k+1}$ – $\bigcap \{\Sigma_k^{2k+1}([0,1]; \mathscr{C}_n) \mid 1 \leqslant n < \infty\}$, где $\mathscr{C}_n = [0, 3^{-n}] \cup \bigcup \{3^{-n} \cdot [3i-1, 3i+1] \mid 1 \leqslant i < 3^{n-1}\} \cup [1-3^{-n}, 1]$. Ясно, что $M_0^1 = \mathscr{C}$ и $N_0^1 = \mathscr{J}$. Если $k = \infty$, то $N_\infty^\infty = \Sigma_\infty^\infty(\mathbb{R}^1; \mathscr{J}) = \mathbb{R}^\omega$ совпадает в силу теоремы Андерсона–Кадеца [6] с гильбертовым пространством $l_2$, $M_\infty^\infty = \bigcap \{\Sigma_\infty^\infty([0,1]; \mathscr{C}_n) \mid 1 \leqslant n < \infty\} = [0,1]^\omega$ есть гильбертов куб $Q$. Среди многих свойств, присущих пространствам $M_k^{2k+1}$ и $N_k^{2k+1}$, выделим следующие.

Предложение 1.1. *Пусть $X \cong M_k^{2k+1}$ $(X \cong N_k^{2k+1})$, $0 \leqslant k \leqslant \infty$. Тогда*

$(1)_k$ *$X$ есть компактное (польское) пространство размерности $k$;*

$(2)_k$ *$X$ есть абсолютный экстензор в размерности $k$, т.е. $X \in \mathrm{AE}(k)$;*

Работа выполнена при частичной поддержке фонда INTAS (грант № 96-0712), гранта NSERC № OGP 005616 и гранта Министерства образования Республики Беларусь.

$(3)_k$ *$X$ является сильно $k$-универсальным компактным (сильно $k$-универсальным польским) пространством.*

Напомним, что компактное (польское) пространство $X$ называется сильно $k$-универсальным, если любое отображение $\varphi\colon Z \to X$ из компактного (польского) пространства $Z$, $\dim Z \leqslant k$, как угодно близко аппроксимируется замкнутым вложением.

На протяжении почти семидесяти лет трудами многих математиков было установлено, что компактное пространство, удовлетворяющее $(1)_k$–$(3)_k$, гомеоморфно $M_k^{2k+1}$: Брауэр [7] ($k = 0$), Андерсон [8] ($k = 1$), Торунчик [9] ($k = \infty$), Бествина [10] ($k < \infty$). Аналогичные результаты для польских пространств устанавливались с некоторой временно́й задержкой: Александров, Урысон [11] ($k = 0$), Торунчик [12] ($k = \infty$), Кавамура, Левин, Тимчатин [13] ($k = 1$). Несмотря на интенсивные исследования проблемы характеризации конечномерных пространств Небелинга до сих пор недоказанной оставалась правдоподобная

Гипотеза 1.2. *Любое $k$-мерное сильно $k$-универсальное польское* AE$(k)$-*пространство $X$ гомеоморфно пространству Небелинга $N_k^{2k+1}$ для всех* $2 \leqslant k < \infty$.

Целью настоящей работы является доказательство гипотезы, а также

(i) нахождение в пространстве Небелинга замены кусочно линейной структуре PL-многообразий, полностью определяющей топологию $N_k^{2k+1}$;
(ii) установление в пространстве Небелинга теоремы о незаузленности относительно произвольных $Z$-множеств;
(iii) сколь угодно близкая аппроксимация гомеоморфизмом любого UV$^{k-1}$-отображения между $N_k^{2k+1}$;
(iv) существование *совершенной $k$-резольвенты* над $k$-мерным польским сильно $k$-универсальным AE$(k)$-пространством, т.е. его представление в виде образа совершенного UV$^{k-1}$-отображения, определенного на $N_k^{2k+1}$;
(v) сколь угодно близкая аппроксимация совершенной $k$-резольвенты над $k$-мерным сильно $k$-универсальным польским AE$(k)$-пространством *улучшенной* $k$-резольвентой, т.е. совершенной $k$-резольвентой, у которой множество сингулярных точек есть ручное $\sigma Z$-множество;
(vi) *сжатие* этой улучшенной $k$-резольвенты, т.е. сколь угодно близкая ее аппроксимация гомеоморфизмом.[1]

Одна из основных идей, лежащих в основе топологической характеризации пространств, заключается в их аппроксимации некоторыми комбинаторными объектами (например, нервами покрытий) с последующей их контролируемой перестройкой и предельным переходом. В случае пространств Менгера и Небелинга такими комбинаторными объектами являются *разбиения* – специальные разновидности покрытий – и их *соответствия* – отображения разбиений, сохраняющие пересечения элементов разбиений. Разбиения призваны дискретизировать исходное топологическое пространство, а соответствия

[1] Отметим, что пп. (iv)–(vi) можно рассматривать и как план доказательства гипотезы.

разбиений – непрерывные отображения топологических пространств. Возникающий на этом пути метод разбиений был развит в работах [8], [10], [11], [13]–[15]. Условно этот метод делится на две составные части: абстрактную и геометрическую. Бинг и Андерсон работали непосредственно с разбиениями характеризуемых пространств (в размерности один), а Бествина – с разбиениями их полиэдральных окрестностей. Главная черта предлагаемого метода исследования пространств Небелинга $N_k^{2k+1}$ в многомерном случае $2 \leqslant k < \infty$ состоит в соединении геометрического подхода Бествины с абстрактным подходом Бинга–Андерсона.

Чтобы непосредственно работать с разбиениями пространств, имеющих довольно сложное строение, избирается полностью аксиоматический метод, истоки которого содержатся в работе [10].[2] Для этого мы вводим аналог кусочно линейной структуры посредством списка требований (аксиом конструктивных множеств) на подмножества исследуемого пространства. В последующем рассматриваются только разбиения, состоящие из таких множеств. Далее формулируется полная система аксиом об измельчениях и преобразованиях разбиений: любые два пространства одной размерности и связности, им удовлетворяющие, будут гомеоморфны. Попутно заметим, что нам представляется актуальной проблема упрощения аксиоматики, так как общее количество аксиом все еще велико.

Успех реализации предлагаемого аксиоматического подхода, сопряженной с преодолением ряда трудностей, во многом связан с возможностью вычленения и обособления геометрической, топологической и алгебраической составляющих развиваемой теории. Это позволяет избегать использования чрезмерно громоздких конструкций и добиться структурной прозрачности статьи. Вся геометрия сведена к проверке системы аксиом для $N_k^{2k+1}$. Остальные рассуждения носят общий топологический и алгебраический характер и связаны с продолжением отображений и гомотопий, процедурами улучшения связностных свойств разбиений, алгебраическим анализом коммутативных диаграмм гомотопических групп и т.д.

Сделаем небольшое отступление и отметим возможность унификации теорий пространств Небелинга и Менгера, имеющуюся при данном подходе: если в аксиомах пространств Небелинга заменить счетные разбиения на конечные, гомотопические группы со счетным числом образующих на группы с конечным числом образующих, то получается система аксиом пространств Менгера. Хотя настоящая работа содержит доказательство только характеризационной теоремы для пространств Небелинга, однако если сделать соответствующие поправки в рассуждениях, то оно переходит в доказательство характеризационной теоремы для пространств Менгера (проделать соответствующую коррекцию предоставляется читателю). Следует также отметить еще одно достоинство аксиоматического метода. Модифицируя соответствующим образом аксиоматику и доказательства основных теорем, можно будет в дальнейшем получать

[2]Большая часть из предложенных в настоящей работе аксиом содержатся в [10] либо в явном, либо в завуалированном виде. Там же установлена (в явной или неявной форме) связь между ними.

характеризации многообразий Небелинга, а также несепарабельного пространства Небелинга, пространств Небелинга с действиями групп и др.

Совершенно очевидно, что многие осложнения в теории пространств Небелинга имеют общетопологический характер и связаны с отсутствием свойств компактности. Сложность другого характера возникает при проверке предлагаемой системы аксиом. Поскольку работа непосредственно с $N_k^{2k+1}$ вызывает значительные трудности, то приходится использовать гомеоморфные ему полиэдральные псевдовнутренности PL-многообразий, которые в нашей работе будут называться *ядрами Небелинга*. Далее, "правильное" определение простой модели системы аксиом следует подкрепить проверкой для этой модели всех аксиом – этому посвящена третья часть работы.

Проще всего это делается в компактном (менгеровском) случае, поскольку здесь существует каноническое соответствие между разбиениями простой модели и PL-разбиениями ее полиэдральных окрестностей. В результате проверка модифицированных аксиом (для $M_k^{2k+1}$) легко сводится к кусочно линейному случаю и осуществляется параллельно [10] (за исключением отсутствующих там аксиом уединения и $Z$-множеств). В небелинговском случае такое соответствие устанавливается достаточно тонкими рассуждениями и носит "полуканонический" характер. Как следствие возникают значительные трудности как на стадии редуцирования аксиом к кусочно линейному случаю, так и при доказательстве кусочно линейных аналогов некоторых аксиом. Так, например, существенно новый момент возникает в вопросе выбора нижней границы $m$ для размерностей PL-многообразий, порождающих $k$-ядро Небелинга: $m$ должно превышать традиционное значение $2k+1$ как минимум на две единицы.

Наиболее важные результаты статьи основываются на процедуре улучшения свойств связности элементов разбиения и их пересечений, впервые во всей полноте примененной Бествиной в менгеровском случае. Отслеживать связностные свойства необходимо потому, что только в случае, когда элементы разбиения $X \in \mathrm{ANE}(k)$ и их пересечения являются абсолютными экстензорами в соответствующих размерностях (так называемые *$k$-разбиения*), каноническое отображение в нерв такого разбиения является $k$-эквивалентностью и, тем самым, нерв несет существенную информацию о связности $X$.

В самом простом виде проблема улучшения связности разбиения заключается в нахождении $k$-разбиения $\mathscr{Q}$ пространства $X \in \mathrm{AE}(k)$, изоморфного $k$-разбиению $\widehat{\mathscr{Q}}$ другого $\mathrm{AE}(k)$-пространства $\widehat{X}$. Ее решение следует начинать с построения какого-либо разбиения $\mathscr{Q}'$ пространства $X$, изоморфного $\widehat{\mathscr{Q}}$. Так как в начальный момент разбиение $\mathscr{Q}'$ произвольно, то аккомпанемент трансформации между $\mathscr{Q}'$ и $\widehat{\mathscr{Q}}$ не является $k$-эквивалентностью.[3] Далее последовательно улучшается связность $\mathscr{Q}'$ с сохранением имеющегося изоморфизма между разбиениями. Однако основной используемый для этого прием – перестройка элементов разбиений посредством заклейки образующих их гомотопических групп – не в силах существенно повлиять на аккомпанемент и перестроить его в $k$-эквивалентность, если аккомпанемент первоначально не обладал этим свойством. В то же время любой аккомпанемент трансформации между

[3]Определение трансформации и ее аккомпанемента см. в § 7. Если трансформация тождественна, $\mathscr{Q}' = \widehat{\mathscr{Q}}$, то ее аккомпанемент совпадает с каноническим отображением в нерв $\widehat{\mathscr{Q}}$.

$k$-разбиениями обязан быть $k$-эквивалентностью. По этой причине проблему улучшения свойств связности разбиения следует ставить и решать в исправленном виде: пусть аккомпанемент трансформации между $\mathscr{Q}'$ и $\widehat{\mathscr{Q}}$ уже является $k$-эквивалентностью, требуется найти $k$-разбиение $\mathscr{Q}$, изоморфное $\widehat{\mathscr{Q}}$. Отсюда видно, что гомотопические группы размерности $k$ в пространствах Небелинга играют существенную роль, хотя запас $k$-мерных гомотопий в них невелик.

Гомотопические группы элементов перестраиваемых разбиений имеют счетное число образующих. В отличие от менгеровского случая последовательное заклеивание образующих здесь не дает эффекта из-за отсутствия стабилизации осуществляемых построений. По этой причине мы вынуждены развить метод уединения изоморфных копий разбиений, позволяющий обойти эту (существенно небелинговскую) трудность и осуществить заклеивания счетного числа образующих гомотопических групп одновременно: сначала построить счетное дискретное семейство изоморфных копий исходного разбиения, затем заклеить $i$-ю образующую гомотопической группы в $i$-й копии, после чего собрать счетное число перестроенных разбиений в единое разбиение, являющееся искомым. Вместе с тем метод уединения является одним из самых действенных инструментов в работе, его применение в других частях позволяет существенно упростить многие рассуждения.

Техника, выработанная в процессе решения проблемы улучшения связности разбиения, далее существенно усиливается за счет более тщательного контроля над используемыми параметрами и применяется в принципиально важной теореме о $Z$-незаузленности. В самой простой формулировке она утверждает, что частичный гомеоморфизм между $Z$-множествами $N_k^{2k+1}$ может быть продолжен до гомеоморфизма всего пространства. Доказанная в полном объеме эта теорема представляет собой мощный инструмент в исследовании пространств Небелинга и играет решающую роль при построении и улучшении резольвент.

Отметим особенность доказательства общей теоремы о $Z$-незаузленности для пространств Небелинга. В настоящей работе она сводится к теореме о незаузленности относительно более узкого класса ручных $Z$-множеств, не имеющего внутреннего топологического определения. Тщательный анализ показывает, что в случае пространств Менгера в [10] [4] установлена лишь ручная теорема о $Z$-незаузленности. Способ доказательства общей теоремы о $Z$-незаузленности для пространств Менгера недавно предложен М. Бествиной.

Наконец отметим, что чтение этой достаточно длинной статьи потребует значительных усилий. Именно поэтому мы сосредотачиваем внимание только на принципиально важном результате – характеризации пространств Небелинга. За чертой настоящей статьи остаются разнообразные приложения развитого здесь аксиоматического метода, включая характеризации псевдограницы евклидова пространства, многообразий Небелинга и многое другое.

---

[4] В [10; часть 3, с. 69] чрезвычайно кратко описывается аналог этапа 6 из 2.7.6 для доказательства теоремы о $Z$-незаузленности. Однако в отличие от 2.7.6 здесь дополнительно фигурирует $Z$-множество $Z \subset M$, что существенно меняет ситуацию. Если все же попытаться применить рассуждения из 2.7.6, то в определенный момент возникнет необходимость согласования элементов разбиения с $Z$. Это и будет означать, что множество $Z$ должно быть ручным.

Несмотря на то что в основном доказательства изложены подробно, остается все же много вспомогательных утверждений, оставляемых на рассмотрение читателя. Как правило, это относится и к утверждениям, доказываемым аналогично. Если не возникает двусмысленностей, мы будем опускать определения некоторых понятий, возникающих естественным образом.

Вся работа состоит из трех частей. В первой из них приводится аксиоматика пространств Небелинга и в ее рамках решается проблема улучшения связности разбиения. На основе этого во второй части устанавливаются все основные результаты (i)–(vi). В заключительной, третьей, части работы устанавливается непротиворечивость предложенной системы аксиом.

Первая часть состоит из трех глав. Глава 1 посвящена разбиениям и их соответствиям. Здесь вводится понятие ядра Небелинга конструктивного многообразия и приводятся Аксиомы конструктивных множеств. Во второй главе завершается построение системы аксиом пространства Небелинга, которая состоит из аксиом трансверсальности, конфинальности, раздутия, уединения, $Z$-множеств, воротников, а также локальной и глобальной аксиом. Формулируются постулат Бествины и постулат о гомеоморфизме, доказательство которых переносится во вторую часть работы. Третья глава посвящена решению проблемы улучшения связности разбиений. С помощью специального вида перестроек – "join crowd" – доказываются теоремы о сильных перестройках: $l_r$-в $l_{r+1}$-разбиение и $l$- в $(l+1)_1$-разбиение.

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить участников семинара Е. В. Щепина и А. Н. Дранишникова в Математическом институте им. В. А. Стеклова, а также слушателей первых его докладов по топологии пространства Небелинга в Московском и Люблянском университетах. Много ценных и полезных предложений, способствовавших улучшению статьи, было высказано во время визитов автора в Университет Тсукуба (Япония) и Университет Саскатчеван (Канада). Автор благодарит K. Sakai и E. D. Tymchatyn за интерес, проявленный к моим исследованиям. Автор высоко ценит работу, проделанную Y. Iwamoto. Им найден и исправлен ряд неточностей в работе [16]. Нынешним своим видом настоящая статья во многом обязана ему.

Трудно переоценить вклад Младена Бествины в развитие данной области исследования и, в частности, влияние его идей на настоящую статью. Автор признателен М. Бествине за плодотворные обсуждения, приведшие к более сильным результатам. И последнее, эта работа не появилась бы без того понимания и поддержки, которые автор ощущал все эти годы со стороны своих близких.

## § 2. Предварительные сведения и факты

Везде в дальнейшем пространства (отображения), если они не возникают в результате некоторых построений, предполагаются сепарабельными конечномерными метрическими (непрерывными). В частности, компактное пространство всегда метризуемо. Мы будем использовать для $A \subset X$ стандартные обозначения: для замыкания – $\operatorname{Cl} A$; для внутренности – $\operatorname{Int} A$; для границы – $\operatorname{Bd} A$. Будем говорить, что вложение $A \subset B$ *строгое* и писать $A \Subset B$, если $\operatorname{Cl} A \subset \operatorname{Int} B$.

Множество всех открытых покрытий пространства $X$ будем обозначать через $\operatorname{cov} X$. *Окрестностью* множества $A \subset X$ относительно $\omega \in \operatorname{cov} X$ будем называть множество $\bigcup\{U \mid U \in \omega,\ U \cap A \neq \varnothing\}$ и обозначать через $\mathrm{N}(A;\omega)$. *Звездой* покрытия $\omega$ относительно покрытия $\omega'$ назовем покрытие $\mathrm{St}(\omega;\omega') = \{\mathrm{N}(U;\omega') \mid U \in \omega\}$. Многократные звезды $\mathrm{St}(\dots(\mathrm{St}(\omega_1;\omega_2);\omega_3);\dots)$ будем для краткости обозначать через $(\dots((\omega_1 \circ \omega_2) \circ \omega_3) \circ \dots \circ \omega_n)$ или $\omega_1 \circ \omega_2 \circ \dots \circ \omega_n$, а если $\omega_i$ равны между собой – то через $(\omega_1)^k$.

*Телом* системы $\omega$ множеств называется множество $\cup\omega \rightleftharpoons \bigcup\{U \mid U \in \omega\}$ (здесь и далее знак $\rightleftharpoons$ используется для введения новых объектов, стоящих слева от него).

Вписанность покрытия $\omega$ в $\omega_1$ обозначается как $\omega \prec \omega_1$. Если $f, g\colon X \to Y$ суть отображения, а $\delta$ – любое семейство подмножеств $Y$, то *$\delta$-близость $f$ и $g$* (кратко $\operatorname{dist}(f,g) \prec \delta$, или $f \overset{\delta}{\sim} g$) означает, что если $f(x) \neq g(x)$, то

$$\{f(x), g(x)\} \subset W \in \delta.$$

Для ограничения отображения $f$ на подмножество $A \subset X$ принято обозначение $f\restriction_A$, или просто $f\restriction$, если ясно о каком множестве $A$ идет речь. Поскольку $f$ есть продолжение $g = f\restriction_A$, то иногда это записывается как $f = \operatorname{ext}(g)$.

Из [17; часть 6] следует, что язык покрытий и чисел в топологии метрических пространств, по существу, эквивалентен.

Теорема 2.1. *Для любого покрытия $\omega \in \operatorname{cov} X$ существует такая метрика $\rho(x,x')$, совместимая с топологией на $X$, что $\{\mathrm{N}(x;1) \mid x \in X\} \prec \omega$.*

Если $\delta > 0$ есть число, то $\delta$-близость $f$ и $g$ записывается так же, как и в случае покрытий: $\operatorname{dist}(f,g) < \delta$. Расстояние $d(x,y)$ между точками $x, y \in X$ метрического пространства $(X,d)$ будем записывать в виде $\operatorname{dist}(x,y)$, если при этом не возникает путаницы.

Введем ряд понятий, связанных с продолжением отображений. Пространство $X$ называется *абсолютным окрестностным экстензором*, $X \in \mathrm{ANE}$, если любое отображение $\varphi\colon A \to X$, определенное на замкнутом подмножестве $A \subset Z$ пространства $Z$ и называемое *частичным отображением*, может быть продолжено на некоторую окрестность $U \subset Z$ множества $A$ до отображения $\widehat{\varphi}\colon U \to X$, $\widehat{\varphi}\restriction_A = \varphi$. Если всегда возможно продолжить $\varphi$ на $U = Z$, то $X$ называется абсолютным экстензором, $X \in \mathrm{AE}$. Если любое частичное отображение $Z \hookleftarrow A \xrightarrow{\varphi} X$, $\dim Z \leqslant k$, может быть продолжено на все пространство $Z$ [на некоторую окрестность $A$], то $X$ называется абсолютным [окрестностным] экстензором в размерности $k$, $X \in \mathrm{A[N]E}(k)$. По теореме Куратовского–Дугунджи свойство быть экстензором в конечной размерности связано со стягиваемостью и локальной стягиваемостью [18]:

$$X \in \mathrm{A[N]E}(k) \quad \Leftrightarrow \quad X \in \mathrm{C}^{k-1}\&\mathrm{LC}^{k-1}[X \in \mathrm{LC}^{k-1}].$$

Будем говорить, что гомотопия $H\colon X \times [0,1] \to Y$, соединяющая $f, g\colon X \to Y$,

(i) есть *$\omega$-гомотопия*, где $\omega \in \operatorname{cov} Y$ (кратко $H[\operatorname{rel}\omega]$), если выполняется $\{H(x,I) \mid x \in X\} \prec \omega$;

(ii) *постоянна на* $A \subset X$ (кратко $H[\operatorname{rel} A]$), если $f\restriction_A = g\restriction_A = H_t\restriction_A$ для всех $t \in I$.

Если $H\colon X \times I \to Y$ есть гомотопия, то формула

$$H^{-1}(x,t) = H(x, 1-t)$$

определяет *инверсную* $H$ *гомотопию* $H^{-1}\colon X \times I \to Y$. Если гомотопия $G$: $X \times I \to Y$ согласуется с $H$ (т.е. $H_1 = G_0$), то

$$(H \cup G)(w,t) = H(w, 2t), \quad t \leqslant 1/2, \qquad (H \cup G)(w,t) = G(w, 2t-1), \quad t \geqslant 1/2,$$

определяет *соединение гомотопий* $H \cup G\colon W \times I \to Y$.

Из теоремы Борсука о продолжении гомотопии [19] несложно следует возможность перестройки гомотопий специального вида в гомотопии, постоянные на подмножествах.

Предложение 2.2. *Пусть* $(W, A)$ *есть компактная полиэдральная пара, а гомотопии* $E, F, G\colon W \times I \to Y \in \mathrm{ANE}$ *таковы, что* $F$ *является* $\omega$*-гомотопией,* $F[\operatorname{rel} A]$*, а также* $E_1 = F_0$*,* $F_1 = G_0$ *и* $G{\restriction}_{A \times I} = E^{-1}{\restriction}_{A \times I}$ (*и, следовательно,* $E_0{\restriction}_A = G_1{\restriction}_A$). *Если* $E$ *и* $G$ *являются* $\alpha$*-гомотопиями, то существует такая* $\omega \circ \alpha$*-гомотопия* $H\colon W \times I \to Y$*, соединяющая* $E_0$ *и* $G_1$*, что* $H[\operatorname{rel} A]$.

**2.1.** ANE**-тесты.** Пусть $\varepsilon, \delta \in \operatorname{cov} Y$ и $\delta \prec \varepsilon$. *Пара покрытий* $\delta \prec \varepsilon$ *удовлетворяет* $\mathrm{ANE}_Y$*-тесту*, если

(1) для любого замкнутого подпространства $A \subset W$, а также для любых отображений $\widehat{\alpha}\colon W \to Y$ и $\beta\colon A \to Y$ с условием $\operatorname{dist}(\widehat{\alpha}{\restriction}_A, \beta) \prec \delta$ существует продолжение $\widehat{\beta}\colon W \to Y$, $\widehat{\beta}{\restriction}_A = \beta$, с условием $\operatorname{dist}(\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}) \prec \varepsilon$.

Если $Y \in \mathrm{ANE}$, то для любого $\varepsilon \in \operatorname{cov} Y$ существует такое $\delta \in \operatorname{cov} Y$, что $\delta \prec \varepsilon$ удовлетворяет $\mathrm{ANE}_Y$-тесту [18]. Должно быть совершенно ясно, что означает *"пара чисел* $0 < \delta < \varepsilon$ *удовлетворяет* $\mathrm{ANE}_Y$*-тесту"*.

Ясно, что свойство $\mathscr{Q}$ пар вписанных открытых покрытий $Y$ удовлетворять $\mathrm{ANE}_Y$-тесту подчиняется следующим условиям:

(a) если $(\delta \prec \varepsilon) \in \mathscr{Q}$ и $\varepsilon \prec \varepsilon'$, то $(\delta \prec \varepsilon') \in \mathscr{Q}$;
(b) если $\delta' \prec \delta$ и $(\delta \prec \varepsilon) \in \mathscr{Q}$, то $(\delta' \prec \varepsilon) \in \mathscr{Q}$;
(c) для любого покрытия $\varepsilon$ существует пара $(\delta \prec \varepsilon) \in \mathscr{Q}$.

Следующий общий результат содержится в [20] (см. также [17; часть 6]).

Теорема 2.3. *Пусть свойство* $\mathscr{Q}$ *пар вписанных открытых покрытий метрического пространства* $(Y, \varrho)$ *удовлетворяет* (a)–(c)*, а* $\omega \in \operatorname{cov} Y$. *Тогда существует согласованная с топологией на* $Y$ *метрика* $d \geqslant \varrho$ *такая, что*

(i) $\{\mathrm{N}_d(y;1)\}_{y \in Y} \prec \omega$, *где* $\mathrm{N}_d(y;r)$ *есть открытый шар радиуса* $r$;
(ii) *для любых* $0 < 9a < b < 1$ *имеем*

$$(\{\mathrm{N}_d(y;a) \mid y \in Y\} \prec \{\mathrm{N}_d(y;b) \mid y \in Y\}) \in \mathscr{Q}.$$

Отсюда несложно вывести справедливость утверждения, гарантирующего существование большого количества пар чисел $0 < \delta < \varepsilon$, удовлетворяющих $\mathrm{ANE}_Y$-тесту.

Теорема 2.4. *Для любых* ANE*-пространства* $(Y, \varrho)$ *и* $\omega \in \operatorname{cov} Y$ *существует метрика* $d \geqslant \rho$*, совместимая с топологией на* $Y$*, такая, что выполнены свойства* (i) *и*

(iii) *если* $0 < 9\delta < \varepsilon < 1$*, то пара чисел* $\delta < \varepsilon$ *удовлетворяет* $\mathrm{ANE}_Y$*-тесту.*

**2.2. Свойства $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображений.** Пусть $f\colon X \to Y$ есть плотное отображение[5] из $\mathrm{ANE}(k)$-пространства $X$ в $Y$. Скажем, что $f$ является $\mathrm{UV}^{k-1}$-*отображением* (кратко $f \in \mathrm{UV}^{k-1}$), если для любой окрестности $\mathscr{O}(y)$, $y \in Y$, существует такая окрестность $\mathscr{O}_1(y)$, что вложение $f^{-1}(\mathscr{O}_1(y)) \hookrightarrow f^{-1}(\mathscr{O}(y))$ является $(k-1)$-асферичным[6]. Ясно, что совершенное отображение

$$f\colon X \to Y \in \mathrm{UV}^{k-1}$$

в том и только том случае, когда $f^{-1}(y) \in \mathrm{UV}^{k-1}$ для любой $y \in Y$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Скажем, что $f$ является $\varepsilon$-$\mathrm{UV}^{k-1}$-*отображением*, если для любой $k$-мерной компактной полиэдральной пары $(W, A)$ и для любой квадратной коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} X^* \arrow[r, "f"] & Y \\ A \arrow[u, "h"] \arrow[r, hook] & W \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd} \qquad (f_Y^X)$$

существует продолжение $\widehat{h}\colon W \to X$ отображения $h$ такое, что $\operatorname{dist}(g, f \circ h) < \varepsilon$. Несложно установить связь между введенными понятиями.

Предложение 2.5. *Если $Y \in \mathrm{ANE}(k)$, то $f \in \mathrm{UV}^{k-1}$ в том и только том случае, когда $f$ является $\varepsilon$-$\mathrm{UV}^{k-1}$-отображением для любого $\varepsilon > 0$.*

Доказательства последующих трех предложений о свойствах $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображений осуществляются с помощью предложения 2.5.

Предложение 2.6. *Если $f\colon X \to Y \in \mathrm{UV}^{k-1}$, а $Y$ полно, то $Y \in \mathrm{ANE}(k)$. Если дополнительно $X \in \mathrm{AE}(k)$, то $Y \in \mathrm{AE}(k)$.*

Предложение 2.7. *Если $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z \in \mathrm{UV}^{k-1}$, а $Y$ и $Z$ являются полными пространствами, то $g \circ f\colon X \to Z \in \mathrm{UV}^{k-1}$.*

Приведем достаточные условия того, чтобы *почти гомеоморфизм* (т.е. отображение, сколь угодно близко аппроксимирующееся гомеоморфизмом) был $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображением.

Предложение 2.8. *Пусть последовательность $\{f_n\colon X \to Y\}_{n \geqslant 1}$ $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображений равномерно сходится к отображению $f\colon X \to Y$, а $Y$ является полным метрическим пространством. Тогда $f \in \mathrm{UV}^{k-1}$.*

**2.3. $r$-эквивалентность.** Отображение $f\colon X \to Y$ называется $r$-*эквивалентностью*, $r \geqslant 1$, если оно индуцирует биекцию компонент линейной связности $X$ и $Y$ и если для любой $x \in X$ индуцированный гомоморфизм

$$f_*\colon \pi_q(X, x) \to \pi_q(Y, f(x))$$

гомотопических групп является изоморфизмом при $0 < q < r$ и эпиморфизмом при $q = r$. Отображение $f\colon X \to Y$ называется $0$-*эквивалентностью*, если оно индуцирует эпиморфизм компонент линейной связности $X$ и $Y$. Переформулируем это понятия в терминах продолжений отображений и гомотопий.

[5]То есть образ $f(X)$ всюду плотен в $Y$.

[6]Отображение $f\colon X \to Y$ называется $i$-*асферичным*, если для любой $x \in X$ индуцированный гомоморфизм $f_*\colon \pi_q(X, x) \to \pi_q(Y, f(x))$ гомотопических групп является нулевым при $0 < q < i$.

Теорема 2.9. *Отображение $f\colon X\to Y$ является $r$-эквивалентностью тогда и только тогда, когда для любой компактной полиэдральной пары $(W,A)$, $\dim W\leqslant r$, и для любой коммутативной диаграммы ($f_Y^X$) существует отображение $\widehat{h}\colon W\to X$, являющееся продолжением $h$, $\widehat{h}\restriction_A=h$, для которого $f\circ\widehat{h}$ и $g$ гомотопны, $f\circ\widehat{h}\overset{H}{\simeq}g$, причем гомотопия $H$ постоянна на $A$, $H[\operatorname{rel}A]$.*

Доказательство теоремы изложено в [21; гл. 7, § 6, теорема 22]. Если дополнительно потребовать от $X$ и $Y$ хороших связностных свойств, то вместо полиэдральной пары станет возможным брать произвольную $r$-мерную пару. Этот факт мы приводим без доказательства.

Теорема 2.10. *Если $f$ есть $r$-эквивалентность, а*

$$X\in\mathrm{ANE}(r),\qquad Y\in\mathrm{ANE}(r+1),$$

*то для любой пары $(W,A)$, $\dim W\leqslant r$, а также для любых отображений $h\colon A\to X$, $g\colon W\to Y$, $f\circ h=g\restriction_A$, существует отображение $\widehat{h}\colon W\to X$ такое, что $\widehat{h}\restriction_A=h$ и $f\circ\widehat{h}\simeq g[\operatorname{rel}A]$.*

Изучим достаточные условия для $r$-эквивалентности вложений.

Теорема 2.11. *Если $X$ есть объединение $X_0\cup X_1$ замкнутых подмножеств*

$$X_i\subset X,\qquad X_i\in\mathrm{ANE}(r+1),$$

*$X_0\cap X_1\in\mathrm{ANE}(r)$ и вложение $X_0\cap X_1\hookrightarrow X_1$ является $r$-эквивалентностью, то вложение $i\colon X_0\hookrightarrow X$ также есть $r$-эквивалентность.*

Доказательство. Пусть $h\colon A\to X_0$ и $g\colon W\to X$, $\dim W\leqslant r$, взяты из диаграммы ($i_X^{X_0}$). Рассмотрим компакты $W_i=g^{-1}(X_i)$ и $W_{01}=g^{-1}(X_0\cap X_1)$. Отметим, что $A\subset W_0$. Так как вложение $X_0\cap X_1\hookrightarrow X_1$ есть $r$-эквивалентность, то в силу теоремы 2.10 для отображений

$$g\restriction_{W_{01}}\colon W_{01}\to X_0\cap X_1\quad\text{и}\quad g\restriction_{W_1}\colon W_1\to X_1$$

существует отображение $\varphi\colon W_1\to X_0\cap X_1$ такое, что $\varphi\restriction_{W_{01}}=g\restriction_{W_{01}}$ и $g\restriction_{W_1}\overset{G}{\simeq}\varphi$, где $G[\operatorname{rel}W_{01}]$.

Искомое отображение $\widehat{h}\colon W\to X_0$ задается формулой

$$\widehat{h}\restriction_{W_0}=g\restriction_{W_0},\qquad \widehat{h}\restriction_{W_1}=\varphi.$$

Легко проверить, что гомотопия $H\colon W\times I\to X$, заданная формулой $H_t\restriction_{W_0}=g$, $H\restriction_{W_1\times I}=G$, соединяет $g$ и $\widehat{h}$ и удовлетворяет условию $H[\operatorname{rel}A]$.

Пусть $X$ есть объединение $X_0\cup X_1$ замкнутых подмножеств $X_i\subset X$ такое, что $X_i\in\mathrm{ANE}(r+1)$, $X_0\cap X_1\in\mathrm{ANE}(r)$. Из [22] следует, что $X\in\mathrm{ANE}(r+1)$. Легким следствием теоремы 2.11 является уточнение этого факта.

Теорема 2.12. *Если $X_0\in\mathrm{C}^r$, а вложение $X_0\cap X_1\hookrightarrow X_1$ есть $r$-эквивалентность, то $X\in\mathrm{C}^r$ (и, следовательно, $X\in\mathrm{AE}(r+1)$). В частности, если $X_0\in\mathrm{AE}(r+1)$, $X_1\in\mathrm{AE}(r+1)$, а $X_0\cap X_1\in\mathrm{AE}(r)$, то $X\in\mathrm{AE}(r+1)$.*

Определение 2.13. Пусть $\sigma \in \operatorname{cov} B$. Вложение $e\colon C \hookrightarrow B$ называется

(1) *$r$-ретракцией относительно* $\sigma$, если для любой полиэдральной пары $(W, A)$, $\dim W \leqslant r$, и для любого отображения $\varphi\colon W \to B$, $\varphi(A) \subset C$, существует отображение $\widetilde{\varphi}\colon W \to C$ такое, что $\widetilde{\varphi}{\restriction}_A = \varphi{\restriction}_A$ и $\operatorname{dist}(\varphi, \widetilde{\varphi}) \prec \sigma$;

(2) *деформационной $r$-ретракцией относительно* $\sigma$, если для любой полиэдральной пары $(W, A)$, $\dim W \leqslant r$, и для любого отображения $\varphi\colon W \to B$, $\varphi(A) \subset C$, существует отображение $\widetilde{\varphi}\colon W \to C$ такое, что $\widetilde{\varphi}{\restriction}_A = \varphi{\restriction}_A$ и $\varphi \overset{F}{\simeq} \widetilde{\varphi}$, где $F[\operatorname{rel}\sigma]$ и $F[\operatorname{rel} A]$.

Если $\sigma \in \operatorname{cov} B$ одноэлементно, то будем говорить просто о *$r$-ретракции* и о *деформационной $r$-ретракции* соответственно.

Отметим, что любая $r$-ретракция индуцирует мономорфизм гомотопических групп $\pi_i$, $i < r$. Из теоремы 2.9 следует, что классы деформационных $r$-ретракций и $r$-эквивалентностей совпадают. Дополним эту информацию полезным в дальнейшем результатом.

Предложение 2.14. *Вложение*

$$e\colon C \hookrightarrow B$$

*является деформационной $(r-1)$-ретракцией и $r$-ретракцией тогда и только тогда, когда оно индуцирует биекцию компонент линейной связности и для любого $x \in C$ гомоморфизм $e_*\colon \pi_q(C, x) \to \pi_q(B, x)$ гомотопических групп, индуцированный $e$, является изоморфизмом при $0 < q < r$.*

# Глава 1. Разбиения и их соответствия

## § 3. Разбиения пространств

Определение 3.1. Покрытие $\mathscr{P} = \{p_\alpha \mid \alpha \in A\}$ пространства $X$ каноническими замкнутыми множествами назовем *предразбиением*, если $\mathscr{P}$ есть локально конечное покрытие и имеет непересекающиеся ядра элементов: $\operatorname{Int} p_\alpha \cap \operatorname{Int} p_{\alpha'} = \varnothing$ для всех $\alpha \neq \alpha'$.

В терминологии [23] и [24] это понятие называлось разбиением. Среди локально конечных покрытий предразбиения обладают особенной наглядностью, их изучение восходит к [1] и [11]. Вводимое ниже понятие известно в литературе как *брикетное разбиение*, см. [14], [15]. Однако в настоящей работе только такие покрытия и рассматриваются, поэтому мы сочли возможным упростить терминологию и называть их просто разбиениями. В дальнейшем через $p_{A'}$, где $A'$ есть индексное подмножество $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t\} \subset A$, будем обозначать пересечение $p_{\alpha_1} \cap \dots \cap p_{\alpha_t}$.

Определение 3.2. Предразбиение $\mathscr{P}$ пространства $X$ назовем *разбиением*, если $\dim p_{A'} = \dim X - |A'| + 1$ для любого $A' \subset A$ такого, что $p_{A'} \neq \varnothing$ ($|A'| = t$ есть число элементов $A'$).

Определение 3.2 гарантирует убывание размерности непустых пересечений элементов разбиения $\mathscr{P}$ “правильным” образом. Отметим, что по теореме Менгера [25] в $X$ всегда существует измельчающаяся последовательность $\mathscr{P}_n$ предразбиений с менее ограничительным условием $\dim p_{A'} \leqslant \dim X - |A'| + 1$ для любого $A' \subset A$, $p_{A'} \neq \varnothing$. Ясно, что если $\mathscr{P}_0$ есть подсистема $\mathscr{P}$, то $\mathscr{P}_0$ является разбиением своего тела $\cup \mathscr{P}_0$.

Всюду в дальнейшем нас будут интересовать только разбиения, пересечения элементов которых *размерностно полноценны*, т.е. удовлетворяют следующему условию:

(a) если $F \subset p_{A'}$ замкнуто и $\dim F < \dim p_{A'}$, то $\mathrm{Cl}(p_{A'} \setminus F) = p_{A'}$.

Пусть $L$ есть триангуляция PL-многообразия $M$, $M = |L|$. Через $(\beta^r L)^{(s)}$ обозначим семейство симплексов размерности $\leqslant s$ $r$-го барицентрического подразделения $\beta^r L$. Примером разбиения $M$ служит разложение $\mathscr{P}$ на ручки, ассоциированное с $\beta L$: $\mathscr{P} = \{\mathrm{St}(v, \beta^2 L) \mid v \in (\beta L)^{(0)}\}$, где $\mathrm{St}(v, L)$ есть звезда $\bigcup\{\Delta \in L \mid v \in \Delta\}$ вершины $v$.

Важным понятием, позволяющим во многих ситуациях проводить рассуждения по индукции, является остов разбиения.

Определение 3.3. *Остовом* $\mathscr{P}^{(s)}$ *размерности* $0 \leqslant s \leqslant \dim X$ *разбиения* $\mathscr{P}$ называют множество $\bigcup\{p_{A'} \mid \dim p_{A'} = s\} = \bigcup\{p_{A'} : |A'| = \dim X + 1 - s\}$.

Через $\mathrm{ord}_x\, \omega$ обозначим *кратность покрытия* $\omega$ *в точке* $x$, т.е. число элементов $\omega$, содержащих $x$. Ясно, что по-другому остов $\mathscr{P}^{(s)}$ можно определить как $\{x \in X \mid \mathrm{ord}_x \mathscr{P} \geqslant (\dim X + 1) - s\}$. Отметим также, что остов $\mathscr{P}^{(s)}$ замкнут в $X$ и $\dim \mathscr{P}^{(s)} = s$ (в силу локальной конечности замкнутого покрытия $\mathscr{P}$); $\mathscr{P}^{(0)}$ есть дискретное объединение 0-мерных множеств $\bigsqcup\{p_{A'} : |A'| = \dim X + 1\}$; в пространстве $X$ остовы $\mathscr{P}^{(s)}$ задают замкнутую фильтрацию $X = \mathscr{P}^{(\dim X)} \supset \mathscr{P}^{(\dim X - 1)} \supset \cdots \supset \mathscr{P}^{(0)} \supset \mathscr{P}^{(-1)} = \varnothing$. В работе [10] вместо остова $\mathscr{P}^{(s)}$ использовалось другое понятие – *страт* $S_t = \{x \in X \mid \mathrm{ord}_x \mathscr{P} \geqslant t + 1\}$ *разбиения* $\mathscr{P}$ *коразмерности* $(\dim X - t)$.

Определение 3.4. *Ограничением* $\mathscr{P}\restriction_Y$ *разбиения* $\mathscr{P} = \{p_\alpha\}$ *на подмножество* $Y \subset X$ называется семейство $\{p_\alpha \cap Y \mid p_\alpha \in \mathscr{P}$ и $p_\alpha \cap Y \neq \varnothing\}$.

Ограничение разбиения, как правило, не является разбиением, однако в некоторых частных случаях мы можем рассчитывать на исключение. Если $\mathscr{P}$ есть разбиение PL-многообразия $X$ на ручки, ассоциированное с триангуляцией $L$, а $Y$ есть подмногообразие относительно $L$, то $\mathscr{P}\restriction_Y$ совпадает с разбиением $Y$ на ручки, ассоциированным с $L\restriction_Y$. Продолжим изучение операции ограничения разбиений.

Предложение 3.5. *Пусть* $\mathscr{P} = \{p_\alpha\}$ *есть разбиение* $X$ *и* $p_{A'} \neq \varnothing$. *Тогда* $\mathscr{P}' \rightleftharpoons \mathscr{P} \setminus \{p_\alpha \mid \alpha \in A'\}$ *есть разбиение* $X \setminus \mathrm{Int}\big(\bigcup\{p_\alpha \mid \alpha \in A'\}\big)$, *а* $\mathscr{P}'\restriction_{\mathscr{B}\partial p_{A'}}$ *есть разбиение* $\mathscr{B}\partial p_{A'}$.[7]

Доказательство предложения 3.5 легко сводится к следующим трем леммам.

Лемма 3.6. *Множество* $p_{A'} \setminus \mathscr{P}^{(\dim X - |A'|)}$ *плотно в* $p_{A'}$.

[7]Здесь и далее во всей работе под $\mathscr{B}\partial p_{A'}$ понимается относительная граница, т.е. граница $p_{A'}$ в остове $\mathscr{P}^{(\dim X + 1 - |A'|)}$.

Доказательство леммы 3.6. Пусть $s = \dim X - |A'|$. Так как $\dim p_{A'} = s+1$ и $\dim \mathscr{P}^{(s)} = s$, то

$$\dim(p_{A'} \cap \mathscr{P}^{(s)}) \leqslant \dim \mathscr{P}^{(s)} = s$$

и, стало быть,

$$\dim(p_{A'} \cap \mathscr{P}^{(s)}) < \dim p_{A'}.$$

В силу размерной полноценности $\mathscr{P}$ замкнутое подмножество $p_{A'} \cap \mathscr{P}^{(\dim X - |A'|)}$ нигде не плотно в $p_{A'}$ и поэтому $p_{A'} \setminus \mathscr{P}^{(\dim X - |A'|)} = p_{A'} \setminus (p_{A'} \cap \mathscr{P}^{(\dim X - |A'|)})$ плотно в $p_{A'}$.

Лемма 3.7. *Множество* $\{x \in p_{A'} \mid \operatorname{ord}_x \mathscr{P} > |A'|\}$ *совпадает с* $\mathscr{B}\partial p_{A'}$. *Более того*, $\mathscr{B}\partial p_{A'} = \bigcup \{p \cap p_{A'} \mid p \in \mathscr{P},\ p \neq p_\alpha$ *для всех* $\alpha \in A'\}$.

Доказательство леммы 3.7. Для любой точки из $p_{A'}$ возможны лишь рассмотренные ниже два случая $(\alpha)$ и $(\beta)$. Отсюда легко будет следовать доказательство утверждения.

$(\alpha)$ $x \in p \cap p_{A'} \subseteq \mathscr{P}^{(\dim X - |A'|)}$, где $p \notin \{p_i\}$: по лемме 3.6 множество $p_{A''} \setminus \mathscr{P}^{(\dim X - |A'|)}$ всюду плотно в $p_{A''}$, где $A'' = \{p\} \cup \{p_2, \dots, p_t\}$. Поэтому существует последовательность $\{x_n\} \subseteq p_{A''} \setminus \mathscr{P}^{(\dim X - |A'|)}$, сходящаяся к $x$. Покажем, что $\{x_n\} \cap p_{A'} = \varnothing$ и, стало быть, $x \in \mathscr{B}\partial p_{A'}$. Если бы нашлась точка $y \in p_{A''} \setminus \mathscr{P}^{(\dim X - |A'|)}$, которая лежит в $p_{A'}$, то $y \in p \cap p_{A'}$, что противоречило бы тому, что $p_{A''} \setminus \mathscr{P}^{(\dim X - |A'|)} \subseteq \mathscr{P}^{(\dim X + 1 - |A'|)}$ состоит из тех и только тех точек, которые принадлежат только $p, p_2, p_3, \dots, p_t$. Поэтому $p_{A''} \setminus \mathscr{P}^{(\dim X - |A'|)} \subseteq \mathscr{P}^{(\dim X + 1 - |A'|)} \setminus p_{A'}$ и, следовательно, $\{x_n\} \subseteq \mathscr{P}^{(\dim X + 1 - |A'|)} \setminus p_{A'}$, а $x \in \mathscr{B}\partial p_{A'}$.

$(\beta)$ $x$ принадлежит ровно $t$ элементам $p_1, p_2, \dots, p_t$: тогда найдется окрестность $O(x) \subset X$ точки $x$ такая, что $O(x) \cap p = \varnothing$ для всех $p \notin \{p_i\}$. Следовательно, $O(x) \cap \mathscr{P}^{(\dim X + 1 - |A'|)} \subseteq p_{A'}$ и $x \notin \mathscr{B}\partial p_{A'}$.

Из лемм 3.6 и 3.7 несложно вывести справедливость следующего факта.

Лемма 3.8. *Множество* $p_{A'}$ *канонически замкнуто в* $\mathscr{P}^{(\dim X + 1 - |A'|)}$.

Объединяя некоторые элементы разбиения $\mathscr{P} = \{p_\alpha \mid \alpha \in A\}$ пространства $X$, получаем новое разбиение $\mathscr{Q} = \{q_\beta \mid \beta \in B\}$, называемое *укрупнением* $\mathscr{P}$. Ясно, что $\mathscr{P} \prec \mathscr{Q}$ и $q_\beta = \bigcup \{p_\alpha \mid p_\alpha \subset q_\beta\}$.

## § 4. Нервы разбиений и канонические отображения

*Нервом разбиения* $\mathscr{P} = \{p_\alpha \mid \alpha \in A\}$ пространства $X$ будем называть полиэдр $\mathscr{N}\langle\mathscr{P}\rangle$, вершины которого $\langle p_\alpha \rangle$ находятся во взаимно однозначном соответствии с индексным множеством $A$, а $\Delta = \langle p_{\alpha_0}, p_{\alpha_1}, \dots, p_{\alpha_s} \rangle$ есть $s$-мерный симплекс $\mathscr{N}\langle\mathscr{P}\rangle$ с вершинами $\langle p_{\alpha_i} \rangle$ в том и только том случае, когда $\bigcap p_{\alpha_i} \neq \varnothing$. Тем самым, любая точка $w \in \operatorname{rint} \Delta \subset \mathscr{N}\langle\mathscr{P}\rangle$ (здесь $\operatorname{rint} \Delta$ есть *относительная внутренность* симплекса $\Delta$) может быть записана в виде $w = \sum \varphi_\alpha \cdot \langle p_\alpha \rangle$, где неотрицательные коэффициенты $\varphi_\alpha$ таковы, что $\sum \varphi_\alpha = 1$ и $\varphi_\alpha > 0$ тогда и только тогда, когда $\langle p_\alpha \rangle$ есть вершина симплекса $\Delta$. Всюду далее нерв $\mathscr{N}\langle\mathscr{P}\rangle$ рассматривается в топологии, порожденной метрикой

$\mathrm{d}\big(\sum\varphi_\alpha\cdot\langle p_\alpha\rangle,\sum\varphi'_\alpha\cdot\langle p_\alpha\rangle\big)=\sum|\varphi_\alpha-\varphi'_\alpha|$. *Открытой звездой* $\mathring{\mathrm{St}}\langle p_{\alpha_0}\rangle$ вершины $\langle p_{\alpha_0}\rangle$ назовем множество $\{\sum\varphi_\alpha\cdot\langle p_\alpha\rangle\in\mathscr{N}\langle\mathscr{P}\rangle\mid\varphi_{\alpha_0}>0\}$. Ясно, что $\mathring{\mathrm{St}}\langle p_{\alpha_0}\rangle$ совпадает с внутренностью звезды $\mathrm{St}\langle p_{\alpha_0}\rangle\rightleftharpoons\big\{\sum\varphi_\alpha\cdot\langle p_\alpha\rangle\mid\varphi_\alpha=0$, если $p_\alpha\cap p_{\alpha_0}=\varnothing\big\}\subset\mathscr{N}\langle\mathscr{P}\rangle$.

Известно [19], что метрический нерв $\mathscr{N}\langle\mathscr{P}\rangle\in\mathrm{ANE}$. Поскольку открытая звезда $\mathring{\mathrm{St}}\langle p_{\alpha_0}\rangle$ стягиваема, то $\mathring{\mathrm{St}}\langle p_{\alpha_0}\rangle\in\mathrm{AE}$. Связь между разбиением $\mathscr{P}$ и его нервом осуществляется с помощью канонического отображения.

Определение 4.1. Отображение $\upsilon\colon X\to\mathscr{N}\langle\mathscr{P}\rangle$ в нерв $\mathscr{N}\langle\mathscr{P}\rangle$ разбиения $\mathscr{P}$ называется *каноническим*, если $\upsilon(p)$ содержится в $\mathring{\mathrm{St}}\langle p\rangle$ для любого элемента $p\in\mathscr{P}$.

Из того, что любое локально конечное замкнутое покрытие $X$ допускает раздутие [26; 7.1.G], легко следует существование канонического отображения.

Предложение 4.2. *Для любого разбиения $\mathscr{P}$ пространства $X$ существует каноническое отображение $\upsilon\colon X\to\mathscr{N}\langle\mathscr{P}\rangle$ в нерв $\mathscr{N}\langle\mathscr{P}\rangle$.*

Геометрический смысл нерва разбиения $\mathscr{P}$ состоит в аппроксимации пространства $X$ полиэдром, “лежащим” достаточно близко от него (мера близости оценивается $\mathscr{P}$). Тогда каноническое отображение $\upsilon$ представляет собой малый сдвиг точек $X$ в этот полиэдр. В дальнейшем мы будем нуждаться в соотношениях близости между $X$ и $\mathscr{N}\langle\mathscr{P}\rangle$, устанавливаемых $\upsilon$. Очевидно, что

(i) $\upsilon^{-1}\upsilon(A)\subset\mathrm{N}(A;\mathscr{P})$, если $A\subset X$ есть тело подсемейства $\mathscr{P}_0\subset\mathscr{P}$, однако
(ii) $\upsilon^{-1}\upsilon(A)\subset\mathrm{N}(A;\mathscr{P}\circ\mathscr{P})$, если $A\subset X$ есть произвольное множество.

Для более тщательного изучения образов множеств при каноническом отображении необходимо ввести специальные подполиэдры $\mathscr{N}\langle\mathscr{P}\rangle$. Обозначим через $\mathscr{N}_A$ нерв разбиения $\mathscr{P}_A\rightleftharpoons\{p\in\mathscr{P}\mid p\cap A\neq\varnothing\}$ окрестности $\mathrm{N}(A;\mathscr{P})$. Если $\sigma\in\operatorname{cov}X$, то через $\mathscr{N}_\sigma$ обозначим замкнутое полиэдральное покрытие $\mathscr{N}\langle\mathscr{P}\rangle$, состоящее из $\mathscr{N}_U$, $U\in\sigma$. Отметим, что для любого $p\in\mathscr{P}$ полиэдр $\mathscr{N}_p$ совпадает со звездой $\mathrm{St}\langle p\rangle\subset\mathscr{N}\langle\mathscr{P}\rangle$ и, следовательно, $\mathscr{N}_{\mathscr{P}}\prec L\circ L$, где $L$ есть естественная триангуляция нерва $\mathscr{N}_{\mathscr{P}}$. В качестве очевидного соотношения на образы множеств отметим вложение

(iii) $\upsilon(A)\subset\mathrm{N}(\mathscr{N}_A;L)$ для любого $A\subset X$.

Менее очевидно другое вложение, показывающее степень близости $\upsilon(A)$ и $\mathscr{N}_A$.

Лемма 4.3. *Пусть $A\subset X$. Тогда $\mathscr{N}_A\subset\mathrm{N}(\upsilon A;\mathscr{N}_{\mathscr{P}})$.*

Приведем еще ряд необходимых соотношений между образами и прообразами канонического отображения. Доказательство оставляем читателю.

Лемма 4.4. *Пусть $A,B\subset X$, $\sigma\in\operatorname{cov}X$. Тогда*

($\alpha$) *если $\upsilon(A)\subset\mathscr{N}_U$, $U\in\sigma$, то $A\subset\mathrm{N}(U;\mathscr{P})$;*
($\beta$) *если $\upsilon(B)\subset\mathrm{N}(\upsilon(A);\mathscr{N}_\sigma)$, то $B\subset\mathrm{N}(A;\mathscr{P}^2\circ\sigma\circ\mathscr{P})$;*
($\gamma$) *если $\sigma,\theta\in\operatorname{cov}X$, то $\mathscr{N}_\sigma\circ\mathscr{N}_\theta\prec\mathscr{N}_{\sigma\circ\mathscr{P}\circ\theta}$.*

## § 5. Ядра Небелинга конструктивных многообразий

Пусть фиксированы $\kappa \geqslant 0$ и PL-многообразие $M^m$ размерности $\geqslant 2\kappa+3$, заданное в триангуляции $L$. Последовательность $\mathfrak{L} = \{L, \delta L, \dots, \delta^r L, \dots\}$ многократных производных подразделений триангуляции $L$ назовем *нуль-последовательностью*, если $\operatorname{mesh} \delta^r L \to 0$, где $\operatorname{mesh} \delta^r L \rightleftharpoons \sup\{\operatorname{diam} \Delta \mid \Delta \in \delta^r L\}$. Примером может служить последовательность барицентрических подразделений.

Для построения теории пространств Небелинга следует расширить класс триангуляций с тем, чтобы все открытые подмножества являлись PL-многообразиями относительно них. Назовем PL-полиэдр (многообразие) $P \subset M^m$ *$\mathfrak{L}$-конструктивным*, если его можно представить в виде тела локально конечного в $P$ семейства $\mathscr{L}$ симплексов, лежащих в $\bigcup\{\delta^r L \mid 0 \leqslant r < \infty\}$. Если $Q$ и $P$ являются $\mathfrak{L}$-конструктивными многообразиями, а $Q$ является PL-подмногообразием $P$, то будем говорить, что *$Q$ является $\mathfrak{L}$-конструктивным подмногообразием $P$*. Ясно, что любое открытое подмножество $\mathfrak{L}$-конструктивного многообразия является $\mathfrak{L}$-конструктивным подмногообразием.

Представление $\mathfrak{L}$-конструктивного полиэдра в виде тела локально конечного семейства симплексов возможно многими способами. Выделим среди них наиболее экономные.

Определение 5.1. Пусть $P \subset M$ есть полиэдр, а $\mathscr{L} \subset \bigcup\{\delta^r L \mid 0 \leqslant r < \infty\}$ есть локально конечное (в $P$) семейство симплексов. $\mathscr{L}$ называется *смешанной триангуляцией $P$ относительно* $\mathfrak{L}$, если $P = \bigsqcup\{\operatorname{rint} \Delta \mid \Delta \in \mathscr{L}\}$.

Название введенного понятия отражает тот факт, что в $\mathscr{L}$ могут встречаться симплексы разных подразделений. Покажем, как локально конечное семейство симплексов $\mathscr{L}'$, лежащее в $\bigcup \delta^r L$ и порождающее $P$ (т.е. $P = |\mathscr{L}'|$), трансформировать в смешанную триангуляцию. Можно без потери общности считать $\mathscr{L}'$ замкнутым относительно перехода к собственным граням. Тогда каждой точке $x \in P$ возможно сопоставить симплекс $\Delta_x \in \mathscr{L}'$ с $x \in \operatorname{rint} \Delta_x$, принадлежащий подразделению $\delta^{n_x} L$ триангуляции $L$ с наименьшим номером $n_x$. Легко проверить, что $\mathscr{L} \rightleftharpoons \{\Delta_x \mid x \in P\} \subset \mathscr{L}'$ есть смешанная триангуляция $P$. Приведенная конструкция используется при построении смешанной триангуляции, обслуживающей целое семейство $\mathfrak{L}$-конструктивных подполиэдров.

Лемма 5.2. *Пусть $P$ есть $\mathfrak{L}$-конструктивный полиэдр. Тогда для любого локально конечного семейства $\mathscr{P} = \{P_\alpha\}$ $\mathfrak{L}$-конструктивных подполиэдров $P$ и любого $\{W_\gamma\} \in \operatorname{cov} P$ существует такая смешанная триангуляция $\mathscr{L} \prec \{W_\gamma\}$ полиэдра $P$ относительно $\mathfrak{L}$, что $\mathscr{L}\restriction_{P_\alpha}$ есть смешанная триангуляция $P_\alpha \in \mathscr{P}$ относительно $\mathfrak{L}$ для всех $\alpha$.*

Следующее свойство смешанных триангуляций приведем без доказательства:

(a) если $\mathscr{L}$ есть смешанная триангуляция $\mathfrak{L}$-конструктивного полиэдра $P$, то для любого $\Delta \in \mathscr{L}$ $\bigcup\{\operatorname{rint} \sigma \mid \sigma \in \mathscr{L}$ и $\operatorname{rint} \Delta \cap \sigma \neq \varnothing\}$ есть окрестность $\operatorname{rint} \Delta$ в $P = |\mathscr{L}|$.

Если $P \subset M^m$ есть $\mathfrak{L}$-конструктивное многообразие и $0 \leqslant \dim M - \dim P \leqslant \kappa$, то $0 \leqslant k = \kappa - (\dim M - \dim P) \leqslant \kappa$. Назовем $P \setminus \mathfrak{S}_{\mathfrak{L}}$ *$k$-ядром Небелинга* $\nu^k_{\mathfrak{L}} P$

*многообразия* $P$, где $\mathfrak{S}_{\mathfrak{L}} \rightleftharpoons \bigcup\bigl\{|(\delta^r L)^{(m-\kappa-1)}| \bigm| 0 \leqslant r < \infty\bigr\}$ есть $\kappa$-псевдограница $M^m$ относительно $\mathfrak{L}$. Скажем, что $P$ является $\nu^k_{\mathfrak{L}}$*-конструктивным*, если

(b) $\nu^k_{\mathfrak{L}} P$ есть замкнутое подмножество в $\nu^{\kappa}_{\mathfrak{L}} M = M \setminus \mathfrak{S}_{\mathfrak{L}}$.

Легко видеть, что не каждое $\mathfrak{L}$-конструктивное многообразие нужной размерности является $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивным. Из (b) имеем $P \cap \nu^{\kappa}_{\mathfrak{L}} M = \mathrm{Cl}_M P \cap \nu^{\kappa}_{\mathfrak{L}} M$ и поэтому $\mathrm{Cl}_M P \setminus P \subset \mathfrak{S}_{\mathfrak{L}}$, но, вообще говоря, $\mathrm{Cl}_M P$ не является многообразием.

Будем называть PL-многообразие $P$ $\nu_{\mathfrak{L}}$*-конструктивным*, если оно является $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивным для соответствующего $k = \kappa - (\dim M - \dim P)$. Ясно, что геометрическая граница $\partial P$ является $\nu_{\mathfrak{L}}$-конструктивным подмногообразием. Если $Q$ и $P$ являются $\nu_{\mathfrak{L}}$-конструктивными многообразиями, а $Q$ является PL-подмногообразием $P$, то будем говорить, что $Q$ *является* $\nu_{\mathfrak{L}}$*-конструктивным подмногообразием* $P$. Легко видеть, что $\nu^s_{\mathfrak{L}}(Q) = Q \cap \nu^k_{\mathfrak{L}}(P)$ для любого $\nu^s_{\mathfrak{L}}$-конструктивного подмногообразия $Q \subset P$.

Ядра Небелинга $\nu^k_{\mathfrak{L}} P$ $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивных PL-многообразий $P$, $0 \leqslant k \leqslant \kappa$, будем называть $\nu^k_{\mathfrak{L}}$*-конструктивными множествами.*

## § 6. Аксиомы конструктивных множеств

Пусть фиксированы $\kappa \geqslant 0$, PL-многообразие $M^m$ размерности $\geqslant 2\kappa + 3$, заданное в триангуляции $L$, и нуль-последовательность $\mathfrak{L} = \{L, \delta L, \delta^2 L, \dots\}$ многократных производных подразделений $L$. Пусть $X$ есть ядро Небелинга $\nu^k_{\mathfrak{L}} P$ $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивного многообразия $P \subset M$. Через $\mathscr{C}^s_X$, $0 \leqslant s \leqslant k = \dim X$, обозначим совокупность всех $s$-ядер Небелинга $\nu^s_{\mathfrak{L}}$-конструктивных подмногообразий $Q \subset P$. В третьей части работы будет показано, что совокупность $\mathscr{C}_X \rightleftharpoons \{\mathscr{C}^s_X \mid 0 \leqslant s \leqslant k\}$ зависит только от $X$, но не от способа представления $X$ в виде $\nu^k_{\mathfrak{L}} P$, а также удовлетворяет свойствам $(\mathscr{C})_1$–$(\mathscr{C})_{10}$, которые мы будем называть *аксиомами конструктивных множеств.*

$(\mathscr{C})_1$ Аксиома базы: $X \in \mathscr{C}_X$ и $\mathscr{C}^{\dim X}_X = \{F \in \mathscr{C}_X \mid \dim F = \dim X\}$ образует замкнутую базу топологии пространства $X$.

$(\mathscr{C})_2$ Аксиома двухэлементных разбиений: если $F \in \mathscr{C}^{\dim X}_X$, $F \neq X$, то $\{F, X \setminus \mathrm{Int}\, F\}$ является $\mathscr{C}_X$*-разбиением* $X$.[8]

$(\mathscr{C})_3$ Аксиома образующих гомотопических групп: $X \in \mathrm{ANE}(\dim X)$ и группа $\pi_i(X)$, $i < k$, имеет счетное число образующих.[9]

$(\mathscr{C})_4$ Аксиома дискретности: $\bigsqcup\{N_\alpha \mid \alpha \in A\} \in \mathscr{C}^{\dim X}_X$ для дискретного семейства $\{N_\alpha \in \mathscr{C}^{\dim X}_X\}_{\alpha \in A}$.

$(\mathscr{C})_5$ Аксиома укрупнения: любое укрупнение $\mathscr{C}_X$-разбиения $\mathscr{P}$ пространства $X$ есть снова $\mathscr{C}_X$-разбиение.

$(\mathscr{C})_6$ Аксиома аддитивности: если $F_1, F_2 \in \mathscr{C}^s_X$, $F_0 \rightleftharpoons F_1 \cap F_2 \in \mathscr{C}^{s-1}_X$, а $F_0 \subset_Z F_1$ и $F_0 \subset_Z F_2$, то $F_1 \cup F_2 \in \mathscr{C}^s_X$.[10]

---

[8] То есть разбиением, все элементы которого и их пересечения принадлежат $\mathscr{C}_X$.

[9] Отметим, что $X \notin \mathrm{ANE}(\dim X + 1)$ и имеет бедный запас $\dim X$-гомотопий.

[10] Замкнутое множество $F$ пространства $X$ называется $Z$*-множеством* (кратко, $F \subset_Z X$), если для любого $\varepsilon \in \mathrm{cov}\, X$ существует отображение $\varphi\colon X \to X$, $\varepsilon$-близкое к $\mathrm{Id}_X$.

$(\mathscr{C})_7$ Аксиома $Z$-множеств в разбиениях: для любого $\mathscr{C}_X$-разбиения $\mathscr{P} = \{p_\alpha\}$ пространства $X$ и для любого $p_{A'} \neq \varnothing$, $A' \subset A$, граница $\mathscr{B}\partial p_{A'} \in \mathscr{C}_X$ и $\mathscr{B}\partial p_{A'} \subset_Z p_{A'}$.

$(\mathscr{C})_8$ Аксиома универсальности: $X$ является сильно $\dim X$-универсальным польским пространством.

$(\mathscr{C})_9$ Аксиома счетной порожденности: существует такой счетный набор $\grave{\mathscr{C}}_X \subset \mathscr{C}_X$, что для любого $\mathscr{C}_X$-разбиения $\mathscr{P}$ пространства $X$ существует $\grave{\mathscr{C}}_X$-разбиение $\grave{\mathscr{P}}$ пространства $X$, вписанное в $\mathscr{P}$.

$(\mathscr{C})_{10}$ Аксиома наследственности: для любого $E \in \mathscr{C}_X$ существуют классы $\mathscr{C}_E \subset \mathscr{C}_X$ и $\grave{\mathscr{C}}_E \subset \grave{\mathscr{C}}_X$, которые удовлетворяют аксиомам $(\mathscr{C})_1$–$(\mathscr{C})_9$, если заменить в них $X$ на $E$.

Из $(\mathscr{C})_2$ следует, что любое $F \in \mathscr{C}_X^{\dim X}$, $F \neq X$, является канонически замкнутым в $X$, а также $X \setminus \operatorname{Int} F \in \mathscr{C}_X^{\dim X}$ и $\operatorname{Bd} F \in \mathscr{C}_X^{\dim X - 1}$; из $(\mathscr{C})_2$ и $(\mathscr{C})_7$ следует, что $\operatorname{Bd} F \subset_Z F$.

Определение 6.1. В дальнейшем любое пространство $X$ с семействами множеств $\grave{\mathscr{C}}_X \subset \mathscr{C}_X$, удовлетворяющих аксиомам $(\mathscr{C})_1$–$(\mathscr{C})_{10}$, будем называть *абстрактным* $\nu^{\dim X}$*-конструктивным пространством*, элементы семейства $\mathscr{C}_X$ – *абстрактными* $\nu$*-конструктивными множествами*, а само семейство $\mathscr{C}_X$ – $\mathscr{C}$-структурой на $X$.

Получим ряд следствий из приведенных аксиом.

(a) Абстрактное $\nu^0$-конструктивное пространство $X$ допускает счетное $\mathscr{C}_X$-разбиение.

В самом деле, в силу $(\mathscr{C})_8$ и $(\mathscr{C})_1$ существует дискретное счетное семейство $\{E_i \in \mathscr{C}_X^0 \mid i \geqslant 1\}$. Из $(\mathscr{C})_4$ следует, что $\bigcup E_i \in \mathscr{C}_X^0$, а из $(\mathscr{C})_2$ имеем $E_0 \rightleftharpoons X \setminus \bigcup\{E_i \mid i \geqslant 1\} \in \mathscr{C}_X^0$. Легко видеть, что $\{E_0, E_1, E_2 \ldots,\}$ есть искомое разбиение $X$.

Из аксиом $(\mathscr{C})_3$ и $(\mathscr{C})_8$, а также [27] следует, что

(b) любой компакт $K \subset E$, $E \in \mathscr{C}_X$, является $Z$-множеством в $E$.

Отсюда несложно вывести свойство совместной дизъюнктности:

(c) пусть $E$ и $F \in \mathscr{C}_X$, а компакты $A$ и $B$ таковы, что $\dim A \leqslant \dim E$ и $\dim B \leqslant \dim F$; тогда любые отображения $\varphi\colon A \to E$ и $\psi\colon B \to F$ сколь угодно близко аппроксимируются отображениями $\varphi'\colon A \to E$ и $\psi'\colon B \to F$ с дизъюнктными образами.

Из аксиом $(\mathscr{C})_1$ и $(\mathscr{C})_{10}$ следует, что семейство $\mathscr{C}_X$ размерностно полноценно. Тем самым для $\mathscr{C}_X$-разбиений справедливо предложение 3.5. В дальнейшем будем $\mathscr{C}_X$-разбиения абстрактных $\nu^{\dim X}$-конструктивных пространств $X$ называть *удобными разбиениями* или просто *разбиениями*, если при этом не будет возникать недоразумений.

Пусть $\mathscr{P}$ есть разбиение $X$. Если $B \subset_Z X$, то $B \cap p_{A'}$ не является, вообще говоря, $Z$-множеством в $p_{A'}$ для $A' \subset A$ с $|A'| \geqslant 2$. Однако обратный факт имеет место.

Лемма 6.2. *Пусть $\mathscr{P} = \{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ есть разбиение $X$. Если $B \cap p_{A'} \subset_Z p_{A'}$ для всех $A' \subset A$, то $B \subset_Z X$.*

Доказательство леммы легко сводится к конечным $\mathscr{P}$. Далее проводится индукция по количеству элементов в $\mathscr{P}$. Наши рассуждения основываются на следующем простом факте.

Лемма 6.3. *Пусть* $X \in \mathrm{ANE}(k)$, *а* $X_i \subset X$, $i = 1, 2$, *суть такие замкнутые* $\mathrm{ANE}(k)$*-подпространства, что* $X_1 \cup X_2 = X$ *и* $X_0 \rightleftharpoons X_1 \cap X_2 \in \mathrm{ANE}(k-1)$. *Если* $B \subset X$ *есть замкнутое подмножество такое, что* $B \cap X_i \subset_Z X_i$ *для* $i = 0, 1, 2$, *то* $B \subset_Z X$.

Счетное дизъюнктное объединение $D = \bigsqcup F_i$ компактных подмножеств $F_i$ пространства $X$ называется

(1) *$Z$-детектором в $X$*, если любое замкнутое подмножество $F \subset X$, не пересекающееся почти со всеми $F_i$, является $Z$-множеством;
(2) *универсальным $Z$-детектором $D$ в $X$*, если $D \cap F$ является $Z$-детектором в $F$ для любого $F \in \mathscr{C}_X$.

Доказательство следующего факта в основном следует рассуждениям из [10; 4.3.1, шаг 2], если воспользоваться свойством (c) совместной дизъюнктности.

Предложение 6.4. *Существует универсальный $Z$-детектор $D$ относительно $\grave{\mathscr{C}}_X$, т.е. $D \cap F$ является $Z$-детектором в $F$ для любого $F \in \grave{\mathscr{C}}_X$.*

Покажем, что $D$ из предложения 6.4 является универсальным $Z$-детектором. В самом деле, пусть замкнутое множество $B \subset F \in \mathscr{C}_X$ не пересекается с $D$. В силу $(\mathscr{C})_9$ существует разбиение $\mathscr{P} = \{p_\alpha\}$ множества $F$, пересечения элементов которого принадлежат $\grave{\mathscr{C}}_X$. Так как $D$ является универсальным $Z$-детектором относительно $\grave{\mathscr{C}}_X$, то $B \cap p_{A'} \subset_Z p_{A'}$. Далее следует воспользоваться леммой 6.2: $B \subset_Z F$.

## § 7. Соответствия разбиений

В этом параграфе пространства $X$ и $\widehat{X}$ являются абстрактными $\nu^k$-конструктивными пространствами, $\mathscr{P} = \{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ и $\widehat{\mathscr{P}} = \{\widehat{p}_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ – их разбиениями.

Разбиения являются дискретным вариантом понятия топологического пространства. Теперь следует позаботиться и о введении дискретного аналога непрерывных отображений пространств.

Определение 7.1. Отображение $T\colon \mathscr{P} \to \widehat{\mathscr{P}}$ элементов разбиений $\mathscr{P}$ и $\widehat{\mathscr{P}}$ (рассматриваемых как дискретные множества) называется *соответствием разбиений*, если $p_{A'} \neq \varnothing$, $A' \subset A$, всегда влечет $Tp_{A'} \rightleftharpoons \bigcap \{T(p_\alpha) \mid \alpha \in A'\} \neq \varnothing$.

Определение 7.2. Отображение $\alpha\colon X \to \widehat{X}$ назовем *сильным аккомпанементом* соответствия $T\colon \mathscr{P} \to \widehat{\mathscr{P}}$, если $\alpha(p) \subseteq T(p)$ для любого $p \in \mathscr{P}$.

Ясно, что $T$ является дискретизацией отображения $\alpha$. Биективное отображение разбиений, являющееся соответствием в обе стороны, служит дискретным вариантом гомеоморфизма.

Определение 7.3. Биективное отображение $T\colon \mathscr{P} \to \widehat{\mathscr{P}}$ называется *трансформацией разбиений*, если $p_{A'} \neq \varnothing \iff Tp_{A'} \neq \varnothing$ для любого $A' \subset A$.

Следовательно, биекция $T\colon \mathscr{P} \to \widehat{\mathscr{P}}$ является трансформацией в том и только том случае, когда $T$ и $T^{-1}$ являются соответствиями. Любое соответствие $T\colon \mathscr{P} \to \widehat{\mathscr{P}}$ порождает симплициальное относительно естественных триангуляций непрерывное отображение $\mathscr{L}_T\colon \mathscr{N}\langle\mathscr{P}\rangle \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{P}}\rangle$ нервов, определяемое формулой

$$\mathscr{L}_T\Bigl(\sum \mu_i \cdot \langle p_i\rangle\Bigr) = \sum \mu_i \cdot \langle T(p_i)\rangle.$$

Если $T$ есть трансформация, то $\mathscr{L}_T$ есть симплициальный изоморфизм; если же $\mathscr{L}_T$ есть симплициальный изоморфизм на свой образ, $T$ называется *инъективным соответствием.* Последнее равносильно тому, что $T$ является трансформацией $\mathscr{P}$ и $T(\mathscr{P})$.

Вводимые ниже аккомпанементы играют аналогичную, но более значимую роль, чем сильные аккомпанементы. Главная причина этого состоит в том, что последние плохо взаимодействуют с $k$-мерными гомотопиями.

Определение 7.4. Отображение $\beta\colon X \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{P}}\rangle$ назовем *аккомпанементом* соответствия $T\colon \mathscr{P} \to \widehat{\mathscr{P}}$, если $\beta(p) \subseteq \mathring{\mathrm{St}}\langle T(p)\rangle$ для любого $p \in \mathscr{P}$.

Каноническое отображение $\upsilon\colon X \to \mathscr{N}\langle\mathscr{P}\rangle$ можно рассматривать как аккомпанемент тождественного соответствия. Если $T\colon \mathscr{P} \to \widehat{\mathscr{P}}$ есть соответствие, а $\mathscr{L}_T\colon \mathscr{N}\langle\mathscr{P}\rangle \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{P}}\rangle$ есть симплициальное отображение, порожденное $T$, то композиция $\mathscr{L}_T \circ \upsilon$ является аккомпанементом исходного соответствия $T$. Тем самым, любое соответствие имеет аккомпанемент.

Для любого $p_{A'} \neq \varnothing$

$$\mathring{\mathrm{St}}\langle Tp_{A'}\rangle \rightleftharpoons \bigcap \{\mathring{\mathrm{St}}\langle T(p_\alpha)\rangle \mid \alpha \in A'\}$$

есть непустое открытое стягиваемое множество в $\mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{P}}\rangle$ и, следовательно, $\mathring{\mathrm{St}}\langle Tp_{A'}\rangle \in \mathrm{AE}$.

Предложение 7.5. *Любые аккомпанементы $\beta_i\colon X \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{P}}\rangle$ соответствия $T$ являются гомотопными. Более того, существует гомотопия*

$$H\colon X \times I \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{P}}\rangle,$$

*соединяющая $\beta_i$, такая, что $H(p \times I) \subseteq \mathring{\mathrm{St}}\langle T(p)\rangle$ для всех $p \in \mathscr{P}$.*

Доказательство. Ясно, что если $x \in p_{A'}$, то $\beta_1(x)$ и $\beta_2(x)$ лежат в AE-пространстве $\mathring{\mathrm{St}}\langle Tp_{A'}\rangle$. Построение гомотопии $H$ между $\beta_1$ и $\beta_2$ осуществляется индукцией по $s$-мерным остовам $\mathscr{P}^{(s)}$ разбиения $\mathscr{P}$, $s = 0, 1, \ldots, k$. Не вдаваясь в подробности, приведем лишь индуктивный шаг, который основан на приводимой ниже лемме.

Лемма 7.6. *Пусть гомотопия*

$$H'\colon \mathscr{B}\partial p_{A'} \times I \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{P}}\rangle,$$

*соединяющая $\beta_1{\restriction}_{\mathscr{B}\partial p_{A'}}$ и $\beta_2{\restriction}_{\mathscr{B}\partial p_{A'}}$, такова, что $H'_t(p_{A'} \cap p_\alpha) \subseteq \mathring{\mathrm{St}}\langle T(p_{A'\cup\{\alpha\}}\rangle$ для всех $\alpha \notin A'$ и $t \in I$. Тогда существует гомотопия $H\colon p_{A'} \times I \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{P}}\rangle$, являющаяся продолжением $H'$, которая соединяет $\beta_1{\restriction}_{p_{A'}}$ и $\beta_2{\restriction}_{p_{A'}}$ и для которой $H_t(p_{A'}) \subseteq \mathring{\mathrm{St}}\langle Tp_{A'}\rangle$ для всех $t \in I$.*

Аналогично предложению 7.5 можно исследовать экстензорные свойства аккомпанементов.

Предложение 7.7. *Пусть* $T\colon \mathscr{P} \to \widehat{\mathscr{P}}$ *есть соответствие разбиений. Тогда для любого отображения* $\beta_0\colon Y \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{P}}\rangle$, *заданного на замкнутом подмножестве* $X$ *и удовлетворяющего включению* $\beta_0(p\cap Y) \subset \mathring{\mathrm{St}}\langle T(p)\rangle$ *для всех* $p$, *существует аккомпанемент* $\beta\colon X \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{P}}\rangle$ *соответствия* $T$, *являющийся продолжением* $\beta_0$.

## § 8. Правильные разбиения

В этом параграфе встречающиеся пространства $X$ и $\widehat{X}$ являются, если не оговорено противное, абстрактными $\nu^k$-конструктивными пространствами.

Вершину в иерархии связностных свойств разбиений занимают *правильные* или *$k$-разбиения*, в которых элементы являются $(k-1)$-связными, а связность пересечения $t$ различных элементов уменьшается ровно на $(t-1)$ единиц.

Определение 8.1. Пусть $k \leqslant \dim X$. Удобное разбиение $\mathscr{P}$ пространства $X$ назовем *$k$-разбиением*, если $p_{A'} \in \mathrm{AE}(k+1-|A'|)$ для всех $A' \subset A$ с $p_{A'} \neq \varnothing$ и $|A'| \leqslant k+1$.

Так как аксиома $(\mathscr{C})_3$ влечет $p_{A'} \in \mathrm{ANE}(k+1-|A'|)$, то определение $k$-разбиения реально добавляет лишь гарантированную связность $p_{A'} \in \mathrm{C}^{k-|A'|}$. Отметим также, что в определении $k$-разбиения не требуется полнота его нерва.

Промежуточную роль в изучении связностных свойств разбиений играют *$l$-разбиения* для $0 \leqslant l \leqslant k$. При $l = 0$ связность элементов и их пересечений никак не гарантируются.

Определение 8.2. Пусть $k \leqslant \dim X$. Разбиение $\mathscr{P}$ пространства $X$ назовем $l$-разбиением, $0 \leqslant l \leqslant k$, если $p_{A'} \in \mathrm{AE}(\min\{l, k+1-|A'|\})$ для всех $A' \subset A$ с $p_{A'} \neq \varnothing$.

Перестройка $(l-1)$-разбиения в $l$-разбиение будет осуществляться за $(k+1-l)$ шагов, для чего нам понадобится изучать свойства $(l-1)$-разбиений, у которых связность непустого пересечения $\leqslant r$ различных элементов такая же, как у $l$-разбиения. Более точно,

$$p_{A'} \in \begin{cases} \mathrm{AE}(l), & \text{если } k+1-|A'| \geqslant k+1-r \;\Leftrightarrow\; r \geqslant |A'|, \\ \mathrm{AE}(l-1), & \text{если } k+1-r > k+1-|A'| \geqslant l-1, \\ \mathrm{AE}(k+1-|A'|), & \text{если } k+1-|A'| \leqslant l-1. \end{cases}$$

Такого рода промежуточные разбиения называются *$l_r$-разбиениями.* Ясно, что

(1) $l_{k+1-l}$-разбиения являются $l$-разбиениями;
(2) если $\mathscr{P}$ является $l_r$-разбиением $X$, то $\mathscr{P}_0 \subset \mathscr{P}$ является $l_r$-разбиением своего тела.

Для большей наглядности читателю рекомендуется изобразить график связности пересечения элементов $l_r$-разбиения. Для этого следует выделить множество отмеченных точек, соответствующих $l_r$-разбиению, т.е. тех точек $(t, s)$ целочисленной решетки, для которых $p_{A'} \in \mathrm{AE}(s)$ для всех $A' \subset A$ с $|A'| = t$.

# Глава 2. Система аксиом пространства Небелинга

Приступая к изложению системы аксиом пространства Небелинга, будем далее считать, если не оговорено противное, что $X$ и $\widehat{X}$ суть абстрактные $\nu^k$-конструктивные $\mathrm{AE}(k)$-пространства, а все встречающиеся разбиения – удобные. Через $\widehat{\mathscr{Q}}$ всегда будем обозначать удобное $k$-разбиение пространства $\widehat{X}$ с полным нервом $\mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$.[11]

## § 9. Аксиомы трансверсальности и конфинальности

Идею трансверсальности легче всего понять на примере компактного PL-многообразия $X = M^m$, заданного в триангуляции $L$. Рассмотрим на нем конечное разбиение $\mathscr{P} = \{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$ с элементами, являющимися подполиэдрами относительно $L$. Тогда разложение $\mathscr{Q} = \{q_\gamma\}$ многообразия $M$ на ручки обладает многими свойствами хорошего расположения по отношению к $\mathscr{P}$. Перечислим ряд наиболее характерных свойств $(\mathscr{T})_1$–$(\mathscr{T})_6$, положив их в основу абстрактного понятия трансверсальности одного разбиения другому. Пусть $\mathscr{Q}_{A'} \rightleftharpoons \mathscr{Q}{\restriction}_{p_{A'}}$, где $p_{A'} \neq \varnothing$ для $A' \subset A$. Тогда

- $(\mathscr{T})_1$ $\mathscr{Q}_{A'}$ есть $(k+1-|A'|)$-разбиение $p_{A'}$, имеющее полный нерв;
- $(\mathscr{T})_2$ если $A'' \subset A'$, то естественное вложение разбиений $\mathscr{Q}_{A'} \hookrightarrow \mathscr{Q}_{A''}$ является инъективным;
- $(\mathscr{T})_3$ $\mathscr{Q}_{\partial A'} \rightleftharpoons \mathscr{Q}{\restriction}_{\mathscr{B}\partial p_{A'}}$ есть $(k-|A'|)$-разбиение $\mathscr{B}\partial p_{A'}$, имеющее полный нерв;
- $(\mathscr{T})_4$ естественное вложение разбиений $\mathscr{Q}_{\partial A'} \hookrightarrow \mathscr{Q}_{A'}$ инъективно;
- $(\mathscr{T})_5$ для любого $q \in \mathscr{Q}$ семейство $\{A' \subset A \mid q \cap p_{A'} \neq \varnothing\}$ конечных подмножеств имеет наибольший (относительно вложений) элемент, который мы будем называть *терминальным индексным подмножеством* и обозначать через $A_q$;
- $(\mathscr{T})_6$ если $q_1 \cap q_2 \neq \varnothing$ для $q_1, q_2 \in \mathscr{Q}$, то либо $A_{q_1} \subset A_{q_2}$, либо $A_{q_2} \subset A_{q_1}$.

Определение 9.1. Пусть $\mathscr{P}$ и $\mathscr{Q}$ суть удобные разбиения $X$. Скажем, что *$\mathscr{Q}$ трансверсально к $\mathscr{P}$* ($\mathscr{Q} \pitchfork \mathscr{P}$), если $\mathscr{Q}$ есть $k$-разбиение и выполнены свойства $(\mathscr{T})_1$–$(\mathscr{T})_6$.

Из $(\mathscr{T})_1$ следует, что для любого $F = q_{\gamma_1}\cap\dots\cap q_{\gamma_s}\cap p_{\alpha_1}\cap\dots\cap p_{\alpha_t} \neq \varnothing$, $q_{\gamma_i} \in \mathscr{Q}$, имеет место $F \in \mathscr{C}_X^{\dim X+2-(s+t)}$ и $F \in \mathrm{AE}(\dim X + 2 - (s+t))$. Из $(\mathscr{T})_5$ следует, что в случае $\dim X = 0$ трансверсальность $\mathscr{Q} \pitchfork \mathscr{P}$ равносильна вписанности $\mathscr{Q} \prec \mathscr{P}$.

Трансверсальность одного разбиения другому налагает на них довольно жесткие условия взаимного расположения.

Лемма 9.2. *Если $\mathscr{Q} \pitchfork \mathscr{P}$, то $\mathrm{N}(q;\mathscr{Q}) \subset \mathrm{Int}(\mathrm{N}(p;\mathscr{P}))$ для любых $p \in \mathscr{P}$, $q \in \mathscr{Q}$ таких, что $p \cap q \neq \varnothing$. Тем самым, $\mathscr{Q} \prec \mathscr{P} \circ \mathscr{P}$.*

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно показать, что

(a) $p\cap p_1 \neq \varnothing$ для любых $q_1 \in \mathscr{Q}$ и $p_1 \in \mathscr{P}$ таких, что $q\cap q_1 \neq \varnothing$ и $q_1\cap p_1 \neq \varnothing$.

[11] Полнота полиэдра означает, что конечное множество $S$ его вершин порождает симплекс в том и только том случае, когда любые две вершины из $S$ образуют 1-симплекс. Полнота нерва разбиения $\widehat{\mathscr{Q}} = \{\widehat{q}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ эквивалентна тому, что если $\widehat{q}_\alpha\cap\widehat{q}_\beta \neq \varnothing$ для всех $\alpha, \beta \in A'$, то $\widehat{q}_{A'} \neq \varnothing$.

Предположим противное: $p \cap p_1 = \varnothing$. Из $(\mathscr{T})_5$ легко следует, что

(b) $p \cap p' \neq \varnothing$ для любого $p' \in \mathscr{P}$ с $q \cap p' \neq \varnothing$.

Отсюда и из $p \cap p_1 = \varnothing$ следует, что $q \cap p_1 = \varnothing$. Аналогично получаем $q_1 \cap p = \varnothing$. Поэтому

(c) $p_1 \notin A_q$ и $p \notin A_{q_1}$, а также $p \in A_q$ и $p_1 \in A_{q_1}$ (так как $p \cap q$ и $q_1 \cap p_1$ непусты).

Но поскольку $q \cap q_1 \neq \varnothing$, $(\mathscr{T})_6$ влечет $A_q \subset A_{q_1}$ или $A_{q_1} \subset A_q$. Это противоречит (c).

Следующее усиление леммы 9.2 получается ее многократным применением.

Лемма 9.3. *Если* $\mathscr{P}_{i+1} \looparrowright \mathscr{P}_i$, $i \geqslant 1$, *то* $\mathrm{N}(p; \mathscr{P}_2 \circ \mathscr{P}_3 \circ \cdots) \subset \operatorname{Int} \mathrm{N}(p; \mathscr{P}_1)$, *где* $p \in \mathscr{P}_1$.

Вводимые ниже аксиомы призваны постулировать существование сколь угодно мелких $k$-разбиений со свойствами взаимного расположения.

Аксиома трансверсальности. *Пусть* $\mathscr{P}$ *есть разбиение* $X$. *Тогда для любого* $\epsilon \in \operatorname{cov} X$ *существует разбиение* $\mathscr{Q}$, *вписанное в* $\epsilon$ *и трансверсальное к* $\mathscr{P}$.

Аксиома конфинальности. *Пусть* $\mathscr{P}$ *есть разбиение* $X$. *Тогда для любого* $\epsilon \in \operatorname{cov} X$ *существует* $k$*-разбиение* $\mathscr{Q}$, *вписанное в* $\epsilon$ *и вписанное в* $\mathscr{P}$.

## § 10. Аксиома раздутия и эквивалентность относительно покрытий

*Раздутием* $\widetilde{\mathscr{P}} = \{\mathscr{O}(p_\alpha)\}$ разбиения $\mathscr{P} = \{p_\alpha\}$ пространства $X$ называется такое открытое покрытие, что $\mathscr{O}(p_\alpha) \supset p_\alpha$ и $p_{A'} \neq \varnothing \ \Leftrightarrow\ \bigcap\{\mathscr{O}(p_\alpha) \mid \alpha \in A'\} \neq \varnothing$. Известно [26; 7.1.G(c)], что любое разбиение допускает раздутие.

Аксиома раздутия. *Для любого разбиения* $\mathscr{P} = \{p_\alpha\}$ *пространства* $X$ *существует такое раздутие* $\widetilde{\mathscr{P}} = \{\mathscr{O}(p_\alpha)\} \in \operatorname{cov} X$, *что для всех* $A' \subset A$ *вложение* $p_{A'} \hookrightarrow \bigcap\{\mathscr{O}(p_\alpha) \mid \alpha \in A'\}$ *индуцирует изоморфизм* $\pi_i$, $i \leqslant k - |A'|$.

Если $\widetilde{\mathscr{P}} = \{\mathscr{O}(p_\alpha)\} \in \operatorname{cov} X$ есть раздутие $l_1$-разбиения $\mathscr{P} = \{p_\alpha\}$, удовлетворяющее введенной аксиоме, то

($\alpha$) $\bigcap\{\mathscr{O}(p_\alpha) \mid \alpha \in A'\} \in \mathrm{AE}(l + 1 - |A'|)$, $|A'| \leqslant l + 1$.

Аксиома раздутия имеет скорее технический характер и применяется в работе лишь один раз в следующем утверждении (неконтролируемый вариант которого установлен в [28]).

Теорема 10.1 (о каноническом отображении $l_1$-разбиения). *Пусть* $0 < l \leqslant k$. *Если* $\mathscr{P}$ *является* $l_1$*-разбиением абстрактного* $\nu^k$*-конструктивного пространства* $X$, *то каноническое отображение* $\upsilon\colon X \to \mathscr{N}\langle\mathscr{P}\rangle$ *является* $l$*-эквивалентностью относительно* $\mathring{\mathscr{N}}_{\mathscr{P}} \rightleftharpoons \{\mathring{\mathrm{St}}\langle p\rangle \mid p \in \mathscr{P}\} \in \operatorname{cov} \mathscr{N}\langle\mathscr{P}\rangle$.

Понятие эквивалентности относительно покрытия призвано отслеживать мелкость участвующей в его определении гомотопии. От этого контроля существенно зависит доказательство ключевой теоремы о незаузленности из второй части.

Определение 10.2. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *$r$-эквивалентностью относительно* $\theta \in \operatorname{cov} Y$, если для любой $r$-мерной компактной пары PL-многообразий $(W, A)$ и для любой коммутативной диаграммы $(f_Y^X)$[12] существуют продолжение $\widehat{h}\colon W \to X$ отображения $h$ и гомотопия $H\colon W \times I \to Y$ такие, что $g \overset{H}{\simeq} f \circ \widehat{h}$, где $H[\operatorname{rel} A]$ и $H[\operatorname{rel} \theta]$.

С помощью $(\alpha)$ теорему 10.1 несложно свести к более простому факту.

Теорема 10.3. *Если $\widetilde{\mathscr{P}} = \{\mathscr{O}(p_\alpha)\} \in \operatorname{cov} X$ есть раздутие $l_1$-разбиения $\mathscr{P} = \{p_\alpha\}$, то каноническое отображение $\widetilde{\upsilon}\colon X \to \mathscr{N}\langle\widetilde{\mathscr{P}}\rangle$ является $l$-эквивалентностью относительно $\mathring{\mathscr{N}}_{\widetilde{\mathscr{P}}}$.*

Доказательство теоремы 10.3. Рассмотрим коммутативную диаграмму $(\widetilde{\upsilon}^X_{\mathscr{N}\langle\widetilde{\mathscr{P}}\rangle})$. Так как $\widetilde{\mathscr{P}}$ есть открытое покрытие, а $(W, A)$ есть компактная пара PL-многообразий, то на $W$ существует такое разбиение $\mathscr{Q}$, что $\mathscr{Q}{\restriction}_A$ есть разбиение $A$, для которого естественное соответствие $\mathscr{Q}{\restriction}_A \hookrightarrow \mathscr{Q}$ инъективно, а также существует соответствие $T\colon \mathscr{Q} \to \widetilde{\mathscr{P}}$, для которых

(1) $h$ есть аккомпанемент $T$;

(2) $g$ есть сильный аккомпанемент $T{\restriction}_A$.

Искомое отображение $\widehat{g}\colon W \to X$ строится индукцией по остовам $\mathscr{Q}$ с сохранением свойства (2). Так как при этом $\widetilde{\upsilon} \circ \widehat{g}$ будет аккомпанементом $T$, то $h$ будет гомотопно $\widetilde{\upsilon} \circ \widehat{g}$ относительно $\mathring{\mathscr{N}}_{\widetilde{\mathscr{P}}}$.

Из теоремы 10.1 непосредственно вытекает

Следствие 10.4. *Пусть $\mathscr{P}$ есть разбиение $X$, $0 < l \leqslant k$. Тогда*

(3) *если $X \in \mathrm{AE}(l)$, а $\mathscr{P}$ есть $l_1$-разбиение, то $\mathscr{N}\langle\mathscr{P}\rangle \in \mathrm{AE}(l)$;*

(4) *если $\mathscr{P}$ есть $l_1$-разбиение, имеющее полный нерв $\mathscr{N}\langle\mathscr{P}\rangle$, то*

$$F \rightleftharpoons \mathrm{N}(p_1 \cap \dots \cap p_t; \mathscr{P}) \in \mathrm{AE}(l)$$

*для любых элементов $p_i \in \mathscr{P}$, $p_1 \cap \dots \cap p_t \neq \varnothing$.*

Для доказательства (4) заметим, что нерв $\mathscr{N}\langle\mathscr{R}\rangle$ разбиения

$$\mathscr{R} \rightleftharpoons \Big\{ p \in \mathscr{P} \;\Big|\; p \cap \bigcap p_i \neq \varnothing \Big\}$$

множества $F$ стягиваем в любую точку $x_0 \in \operatorname{rint}\langle p_1, \dots, p_t\rangle$ линейной гомотопией. Далее примéним теорему 10.1 для канонического отображения $\upsilon\colon F \to \mathscr{N}\langle\mathscr{R}\rangle \in \mathrm{AE}$.

Изучим условия, гарантирующие сохранение $k$-эквивалентности при операциях аппроксимации и ограничения отображений. Начнем с операции ограничения.

Теорема 10.5. *Пусть $X \in \mathrm{ANE}(k)$, а $f\colon X \to Y \in \mathrm{ANE}$ есть $k$-эквивалентность относительно $\theta \in \operatorname{cov} Y$. Пусть $X_0 \subset X$ и покрытие $\sigma \in \operatorname{cov} Y$ таковы, что*

(i) *пара покрытий $\sigma \prec \theta$ удовлетворяет $\mathrm{ANE}_Y$-тесту;*

(ii) *вложение $X_0 \hookrightarrow X$ является $k$-ретракцией относительно $f^{-1}(\sigma)$.*

*Тогда $f{\restriction}_{X_0}\colon X_0 \to Y \in \mathrm{ANE}$ является $k$-эквивалентностью относительно $\theta^2$.*

[12] Определение диаграммы $(f_Y^X)$ дается в теореме 2.9.

С помощью предложения 2.2 о перестройке гомотопии несложно установить условия, при соблюдении которых отображения, близкие к эквивалентностям, также являются эквивалентностями. Будем говорить, что *пара покрытий* $\delta \prec \varepsilon$ *удовлетворяет s-кратному* $\mathrm{ANE}_Y$-тесту, $s \in \mathbb{N}$, если существует такая последовательность покрытий $\delta = \delta_0 \prec \delta_1 \prec \dots \prec \delta_s = \varepsilon$, что каждая соседняя пара покрытий удовлетворяет $\mathrm{ANE}_Y$-тесту.

Теорема 10.6 (об открытости $k$-эквивалентностей). *Пусть* $X \in \mathrm{ANE}(k)$, *а* $f' \colon X \to Y \in \mathrm{ANE}$ *есть $k$-эквивалентность относительно* $\theta \in \operatorname{cov} Y$. *Если*

(iii) $f \colon X \to Y$ *является $\lambda$-близким к* $f'$, *где* $\lambda \in \operatorname{cov} Y$;

(iv) *покрытия* $\lambda \prec \eta$, $\eta \in \operatorname{cov} Y$, *удовлетворяют* 3*-кратному* $\mathrm{ANE}_Y$*-тесту*,

*то* $f \colon X \to Y$ *является $k$-эквивалентностью относительно* $\theta \circ \eta$.

Отсюда как следствие получаем, что справедлива

Теорема 10.7. *Пусть* $X \in \mathrm{ANE}(k)$, $Z \in \mathrm{ANE}$ *и* $\eta \in \operatorname{cov} Z$. *Тогда существует такое* $\theta \in \operatorname{cov} Z$, *что если* $\varphi' \colon X \to Z$ *есть $k$-эквивалентность относительно* $\theta$, *а отображение* $\varphi \colon X \to Z$ *$\theta$-близко к* $\varphi'$, *то* $\varphi$ *есть $k$-эквивалентность относительно* $\eta$.

Доказательство. Пусть $\theta_1, \theta \in \operatorname{cov} Z$ таковы, что $(\theta_1)^2 \prec \eta$, а пара $\theta \prec \theta_1$ удовлетворяет 3-кратному $\mathrm{ANE}_Z$-тесту. В силу теоремы 10.6 $\varphi'$ есть $k$-эквивалентность относительно $\theta_1^2 \prec \eta$.

## § 11. Аксиома уединения

Определение 11.1. Множество $N \in \mathscr{C}^k_X$, $N \neq X$, является *допустимым*, если

(1) вложение $\operatorname{Bd} N \hookrightarrow (X \setminus \operatorname{Int} N)$ является $(k-1)$-эквивалентностью;

(2) вложение $N \hookrightarrow X$ индуцирует мономорфизм гомотопической группы $\pi_{k-1}$.

Из (1) и теоремы 2.11 следует, что вложение $N \hookrightarrow X$ является $(k-1)$-эквивалентностью. Соединяя это с (2), получаем, что $N \hookrightarrow X$ индуцирует изоморфизм гомотопических групп $\pi_i$ при $i < k$. В силу предложения 2.14 условия (1), (2) эквивалентны тому, что

(i) $N \hookrightarrow X$ является деформационной $(k-1)$-ретракцией и $k$-ретракцией;

(ii) $\operatorname{Bd} N \hookrightarrow (X \setminus \operatorname{Int} N)$ является деформационной $(k-1)$-ретракцией.

Определение 11.2. Пусть фиксированы разбиение $\mathscr{P} = \{p_\alpha\}$ пространства $X$ и множество $N \in \mathscr{C}^k_X$, $N \neq X$. Скажем, что вложение $e \colon N \hookrightarrow X$ является *допустимым относительно разбиения* $\mathscr{P}$ пространства $X$, если для всех $p_{A'} \neq \varnothing$, $A' \subset A$,

(3) $p_{A'} \cap N \in \mathscr{C}^{\dim p_{A'}}_X$, $p_{A'} \cap (X \setminus \operatorname{Int} N) \in \mathscr{C}^{\dim p_{A'}}_X$ и $p_{A'} \cap \operatorname{Bd} N \in \mathscr{C}^{\dim p_{A'}-1}_X$;

(4) $p_{A'} \cap N$ является допустимым множеством в $p_{A'}$.

Заметим, что условие (3) эквивалентно тому, что ограничения $\mathscr{P}{\restriction}_N$, $\mathscr{P}{\restriction}_{\operatorname{Bd} N}$ и $\mathscr{P}{\restriction}_{X \setminus \operatorname{Int} N}$ являются разбиениями $N$, $\operatorname{Bd} N$ и $X \setminus \operatorname{Int} N$ соответственно, а естественное вложение $\mathscr{P}{\restriction}_N \hookrightarrow \mathscr{P}$ является трансформацией разбиений. Отметим также, что из (4) следует, что вложения

$$N \cap p_{A'} \hookrightarrow p_{A'} \quad \text{и} \quad \operatorname{Bd} N \cap p_{A'} \hookrightarrow (X \setminus \operatorname{Int} N) \cap p_{A'}$$

являются $(\dim p_{A'}-1)$-эквивалентностями, а вложение $N\cap p_{A'} \hookrightarrow p_{A'}$ индуцирует мономорфизм гомотопической группы $\pi_{\dim p_{A'}-1}$ (напомним, что $\dim p_{A'} = k+1-|A'|$).

Будем говорить, если это не вызовет путаницы, что само множество $N$ *допустимо относительно разбиения* $\mathscr{P}$. В силу предложения 2.14 условие (4) эквивалентно тому, что

(iii) $N \cap p_{A'} \hookrightarrow p_{A'}$ является деформационной $(\dim p_{A'} - 1)$-ретракцией и $\dim p_{A'}$-ретракцией;

(iv) $\operatorname{Bd} N \cap p_{A'} \hookrightarrow (X \setminus \operatorname{Int} N) \cap p_{A'}$ является деформационной $(\dim p_{A'} - 1)$-ретракцией.

Приведем типичный пример допустимого вложения в кусочно линейном случае. Рассмотрим конечное разбиение $\mathscr{P} = \{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$ компактного PL-многообразия $X = M^m$, $m \geqslant 2k+3$, заданного в триангуляции $L$, с элементами, являющимися подполиэдрами относительно $L$. Тогда регулярная окрестность $N$ скелета $|L^{(m-k-1)}|$ является допустимым множеством относительно $\mathscr{P}$. В связи с этим наблюдением введем усиление понятия допустимости, которое и будет центральным понятием в аксиоме уединения.

Определение 11.3. Множество $N \in \mathscr{C}^k_X$ называется *совершенным относительно разбиения* $\mathscr{P}$, если $N$, а также $X \setminus \operatorname{Int} N$ являются допустимыми относительно $\mathscr{P}$.

Замечание 11.4. Из определения 11.2, (4) следует, что ограничение любого $l_r$-разбиения $\mathscr{P}$, $l + r \leqslant k + 1$, пространства $X$ на допустимое относительно $\mathscr{P}$ множество $N$ вновь переходит в $l_r$-разбиение. Если же $N$ является совершенным множеством относительно $\mathscr{P}$, то дополнительно $\mathscr{P}{\restriction}_{X\setminus \operatorname{Int} N}$ будет $l_r$-разбиением $X \setminus \operatorname{Int} N$, а $\mathscr{P}{\restriction}_{\operatorname{Bd} N}$ будет $(l-1)_r$-разбиением $\operatorname{Bd} N$. Отсюда индукцией по остовам разбиения несложно вывести, что

(5) если $N \in \mathscr{C}^k_X$ допустимо относительно $k$-разбиения $\mathscr{P}$, то существует ретракция $r\colon X \to N$, удовлетворяющая условию $r(p_{A'}) \subset p_{A'} \cap N$ для всех $A' \subset A$.

Приведем еще ряд полезных свойств допустимых и совершенных множеств.

Предложение 11.5. *Если $N$ совершенно относительно $k$-разбиения $\mathscr{P}$, то $N$ совершенно относительно $X$.*

Доказательство. В силу теоремы 10.1 канонические отображения

$$\upsilon_X\colon X \to \mathscr{N}\langle\mathscr{P}\rangle \quad \text{и} \quad \upsilon_N\colon N \to \mathscr{N}\langle\mathscr{P}{\restriction}_N\rangle$$

являются $k$-эквивалентностями, а каноническое отображение

$$\upsilon_{\operatorname{Bd} N}\colon \operatorname{Bd} N \to \mathscr{N}\langle\mathscr{P}{\restriction}_{\operatorname{Bd} N}\rangle$$

является $(k-1)$-эквивалентностью. Так как

$$\mathscr{N}\langle\mathscr{P}\rangle \equiv \mathscr{N}\langle\mathscr{P}{\restriction}_N\rangle \quad \text{и} \quad \mathscr{N}\langle\mathscr{P}^{(k-1)}\rangle \equiv \mathscr{N}\langle\mathscr{P}{\restriction}_{\operatorname{Bd} N}\rangle,$$

то $\upsilon_X$ можно подобрать так, что $\upsilon_N = \upsilon_X{\restriction}_N$ и $\upsilon_{\operatorname{Bd} N} = \upsilon_N{\restriction}_{\operatorname{Bd} N}$. Отсюда легко следуют (i), (ii). Аналогично устанавливается допустимость $X \setminus \operatorname{Int} N$.

С помощью предложения 11.5 легко устанавливается его обобщение.

Предложение 11.6. *Если $N$ является совершенным относительно $k$-разбиения $\mathscr{P}$ пространства $X$, то $N$ совершенно относительно любого его укрупнения $\mathscr{Q}$.*

Принципиально важная аксиома уединения, вводимая ниже, постулирует возможность построения копий исходного разбиения, определенных на дискретных семействах множеств, без ухудшения свойств его связности и с сохранением нерва.

Аксиома уединения. *Для любого $\mathscr{C}_X$-разбиения $\mathscr{Q}$ пространства $X$ и для любого дискретного семейства $\{X_i\}_{i\geqslant 1}$ $Z$-множеств $X_i \in \mathscr{C}_X$ существует такое дискретное семейство $\{N_i\}_{i\geqslant 1}$, состоящее из совершенных относительно $\mathscr{Q}$ множеств $N_i$, что $X_i \subset \operatorname{Int} N_i$ для всех $i \geqslant 1$.*

По аксиоме конфинальности существует $k$-разбиения $\mathscr{P} \prec \mathscr{Q}$. Если теперь применить аксиому уединения к $\mathscr{P}$, а затем использовать предложение 11.6, то в формулировке аксиомы уединения можно, не теряя общности, дополнительно считать, что

(v) все $N_i$ будут совершенными относительно любого укрупнения разбиения $\mathscr{Q}$.

Покажем, что семейство $\{N_i\}$ можно выбирать с дополнительным свойством.

Предложение 11.7. *Пусть $\{W_\alpha \in \mathscr{C}^k_X\}$ есть дискретное семейство совершенных множеств относительно разбиения $\mathscr{Q}$. Если $N_\alpha \in \mathscr{C}^k_X$ лежит в $\operatorname{Int} W_\alpha$ и является совершенным относительно $\mathscr{Q}_\alpha \rightleftharpoons \mathscr{Q}\restriction_{W_\alpha}$, то дискретное семейство $\{N_\alpha\}$ состоит из совершенных относительно разбиения $\mathscr{Q}$ подмножеств, а также*

(6) $X \setminus \bigsqcup\{\operatorname{Int} N_\alpha \mid \alpha\}$ *допустимо относительно $\mathscr{Q}$.*

Предложение 11.7 является несложным следствием аксиом $(\mathscr{C})_4$, $(\mathscr{C})_2$, $(\mathscr{C})_{10}$, а также (iii), (iv). Отметим, что имеются примеры дискретных семейств совершенных подмножеств, не удовлетворяющих (6).

## § 12. Аксиомы $Z$-множеств

Определение 12.1. Замкнутое множество $F$ пространства $X$ называется

(a) *поглощаемым $Z$-множеством* (кратко, $F \in \mathscr{Z}_{\mathrm{eng}}$), если для любого удобного разбиения $\mathscr{P}$ пространства $X$ существует совершенное относительно $\mathscr{P}$ множество $N \in \mathscr{C}^k_X$ такое, что $F \subset \operatorname{Int} N$;

(b) *трансверсальным $Z$-множеством* (кратко, $F \in \mathscr{Z}_{\mathrm{tr}}$), если для любого удобного разбиения $\mathscr{P} = \{p_\alpha\}$ пространства $X$ $p_{A'} \cap F \subset_Z p_{A'}$ для любого $A' \subset A$, $p_{A'} \neq \varnothing$.

Так как $X \in \mathscr{C}^k_X$, то, очевидно, $\mathscr{Z}_{\mathrm{tr}} \subset \mathscr{Z}$. Отметим также, что из аксиомы конфинальности и леммы 6.2 несложно следует, что любое трансверсальное множество является $Z$-множеством, $\mathscr{Z}_{\mathrm{eng}} \subset \mathscr{Z}$. Из $(\mathscr{C})_8$ следует, что любое компактное множество в $F \in \mathscr{C}_X$ является $Z$-множеством, и, следовательно, любое компактное множество в $X$ является трансверсальным $Z$-множеством.

Предложение 12.2. *Любое поглощаемое $Z$-множество $F \subset X$ является трансверсальным.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{P} = \{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ есть разбиение $X$ и $\varepsilon \in \operatorname{cov} X$. По аксиоме конфинальности существует $k$-разбиение $\mathscr{Q} = \{q_{B'}\}$, $\mathscr{Q} \prec \mathscr{P}$ и $\mathscr{Q} \prec \varepsilon$. Так как $F$ поглощаемо, то существует совершенное относительно $\mathscr{Q}$ множество $N$, $N \cap F = \varnothing$, которое в силу предложения 11.6 является совершенным относительно $\mathscr{P}$. В силу замечания 11.4, (5) существует ретракция $r\colon X \to N$ такая, что $r(q_{B'}) \subset q_{B'} \cap N$ для всех $B' \subset B$. Следовательно, $\operatorname{dist}(r, \operatorname{Id}) \prec \varepsilon$. Так как $\mathscr{Q} \prec \mathscr{P}$, то $r(p_{A'}) \subset p_{A'} \cap N$ для всех $A' \subset A$. Таким образом, нами установлено, что $r{\restriction}_{p_{A'}} : p_{A'} \to p_{A'}$ $\varepsilon$-близко к $\operatorname{Id}_{p_{A'}}$ и имеет образ, не пересекающийся с $F$.

С учетом предложения 12.2 и формулируемой ниже аксиомы классы трансверсальных и поглощаемых $Z$-множеств оказываются тождественными. Будем использовать в качестве их общего названия термин *ручные $Z$-множества.*

Аксиома $\mathscr{Z}_1$. *Любое трансверсальное $Z$-множество является поглощаемым $Z$-множеством.*

В силу предложения 11.6 эта аксиома легко сводится к проверке того, что если $F \subset X$ есть трансверсальное $Z$-множество, то для любого удобного $k$-разбиения $\mathscr{P}$ пространства $X$ существует совершенное относительно $\mathscr{P}$ множество $N$ такое, что $F \subset \operatorname{Int} N$.

Тождественностью $\mathscr{Z}_{\mathrm{tr}}$ и $\mathscr{Z}_{\mathrm{eng}}$ будем пользоваться двояко. Свойства ручных $Z$-множеств проще устанавливать, пользуясь их трансверсальностью. При доказательстве теорем, в условии которых фигурируют ручные $Z$-множества, мы, как правило, используем их свойство поглощаемости. Следующие свойства ручных $Z$-множеств легко вытекают из их трансверсальности.

Предложение 12.3 (аддитивность). *Если $F_1$ и $F_2$ являются ручными $Z$-множествами в $X$, то и $F_1 \cup F_2$ является ручным $Z$-множеством в $X$.*

Предложение 12.4. *Если $H \subset X$ является счетным объединением ручных $Z$-множеств, а $F$ есть замкнутое множество $X$, содержащееся в $H$, то $F$ является ручным $Z$-множеством в $X$.*

Ручные $Z$-множества составляют лишь часть всех $Z$-множеств. Только в случае $\dim X = 1$ любое $Z$-множество является ручным. Однако уже в случае $\dim X = 2$ существуют $Z$-множества, не являющиеся трансверсальными $Z$-множествами и, следовательно, ручными. В силу приводимого ниже предложения, которое легко следует из аксиомы уединения, такие множества не являются конструктивными.

Предложение 12.5. *Любое $Z$-множество $F \in \mathscr{C}_X$ является ручным $Z$-множеством в $X$. Если $N \in \mathscr{C}_X^k$, то $\operatorname{Bd} N \subset N$ является ручным $Z$-множеством.*

Вторая часть предложения 12.5 следует из первой, так как $\operatorname{Bd} N \subset_Z N$ в силу $(\mathscr{C})_7$.

Последняя из аксиом $Z$-множеств гарантирует замкнутость класса ручных $Z$-множеств относительно операции пересечения с конструктивными множествами.

Аксиома $\mathscr{Z}_2$. *Если $F$ является ручным $Z$-множеством в $X$, а $N \in \mathscr{C}^k_X$, то $F \cap N$ является ручным $Z$-множеством в $N$.*

В дальнейшем мы будем пользоваться только следствием из приведенной аксиомы, которое устанавливается последовательным применением предложения 12.5, аксиомы $\mathscr{Z}_2$ и предложения 12.3.

Предложение 12.6. *Если $F$ является ручным $Z$-множеством в $X$, а $N \in \mathscr{C}^k_X$, то $\operatorname{Bd} N \cup (F \cap N)$ является ручным $Z$-множеством в $N$.*

Не каждое $Z$-множество является ручным $Z$-множеством, однако оно с любой степенью точности может быть приближено ручным.

Предложение 12.7. *Существует такое счетное дизъюнктное семейство $\{X_i\}$ компактных множеств в $X$, что любое замкнутое множество $F \subset X$, не пересекающееся почти со всеми $X_i$, является ручным $Z$-множеством.*

В качестве такого семейства годится универсальный $Z$-детектор в $X$.

В завершение параграфа приведем в качестве следствия аксиомы уединения полезные в дальнейшем факты о ручных $Z$-множествах.

Предложение 12.8. *Для любого $\mathscr{C}_X$-разбиения $\mathscr{Q}$ пространства $X$ и для любого дискретного семейства $\{X_i\}_{i\geqslant 1}$ множеств $X_i \in \mathscr{C}_X$, $X_i \subset_Z X$, существует такое дискретное семейство $\{N_i\}_{i\geqslant 1}$ совершенных относительно $\mathscr{Q}$ подмножеств, удовлетворяющее предложению 11.7, (6), что $X_i \subset \operatorname{Int} N_i$ для всех $i \geqslant 1$.*

Доказательство. Пусть $\{N'_i \subset X\}$ есть такое дискретное семейство совершенных относительно $\mathscr{Q}$ подмножеств, что $X_i \subset \operatorname{Int} N'_i$. В силу предложения 12.5 $X_i \subset_Z N'_i$. Повторно применяя аксиому уединения к $\{X_i, \operatorname{Bd} N'_i\} \subset N'_i$, найдем такие совершенные относительно $\mathscr{Q}\restriction_{N'_i}$ множества $\{N_i \subset \operatorname{Int} N'_i\}$, что $X_i \subset \operatorname{Int} N_i$. В завершение следует применить предложение 11.7.

Предложение 12.9. *Для любых $\mathscr{C}_X$-разбиения $\mathscr{Q}$ пространства $X$ и ручного $Z$-множества $F \subset X$ существует такое дискретное семейство $\{N_i\}_{i\geqslant 1}$ совершенных относительно $\mathscr{Q}$ подмножеств, удовлетворяющее предложению 11.7, (6), что $F \subset \operatorname{Int} N_1$.*

Доказательство. Из того, что $F$ ручное, следует, что $F \subset \operatorname{Int} N$ для совершенного относительно $\mathscr{Q}$ множества $N \in \mathscr{C}^k_X$. Из аксиомы $\mathscr{Z}_2$ следует, что $F$ является ручным $Z$-множеством в $N$. Поэтому $F \subset \operatorname{Int} N_1$ для некоторого совершенного относительно $\mathscr{Q}\restriction_N$ множества $N_1 \subset \operatorname{Int} N$. Ясно, что $N_1$ совершенно и относительно $\mathscr{Q}$. В силу предложения 12.8 существует дискретное семейство $\{N_i \subset X \setminus N\}_{i\geqslant 2}$ совершенных относительно $\mathscr{Q}\restriction_{X\setminus \operatorname{Int} N}$ подмножеств, удовлетворяющее предложению 11.7, (6). Ясно, что дискретное семейство $\{N_i\}_{i\geqslant 1}$ совершенных относительно $\mathscr{Q}$ подмножеств тоже удовлетворяет предложению 11.7, (6).

Предложение 12.10 (об ограничении $k$-эквивалентностей). *Пусть отображение* $f\colon X \to Y \in \mathrm{ANE}$ *есть* $k$*-эквивалентность относительно* $\theta \in \operatorname{cov} Y$, *а* $\mathscr{Q}$ *есть разбиение* $X$. *Тогда для любых* $\varepsilon \in \operatorname{cov} X$ *и ручного* $Z$*-множества* $F \subset X$ *существует такое дискретное семейство* $\{N_i\}_{i\geqslant 1}$ *совершенных относительно* $\mathscr{Q}$ *подмножеств, удовлетворяющее предложению* 11.7, (6), *что* $F \subset \operatorname{Int} N_1$, *а также*

(1) $N_i$ *является* $k$*-ретрактом относительно* $\varepsilon$ *и деформационным* $(k-1)$*-ретрактом относительно* $\varepsilon$ *для всех* $i \geqslant 1$;

(2) $f{\restriction}_{N_i}\colon N_i \to Y$ *является* $k$*-эквивалентностью относительно* $\theta^2$ *для всех* $i \geqslant 1$.

Доказательство. Пусть $\sigma \in \operatorname{cov} Y$ таково, что $\sigma \prec \theta$ удовлетворяет $\mathrm{ANE}_Y$-тесту. В силу аксиомы конфинальности существует $k$-разбиение $\mathscr{P}$ пространства $X$ такое, что $\mathscr{P} \prec \mathscr{Q}\wedge\varepsilon$. Не теряя общности, можно считать, что $\varepsilon \prec f^{-1}\sigma$. Из предложения 12.9 следует, что $F \subset \operatorname{Int} N_1$, где $\{N_i\}_{i\geqslant 1}$ есть дискретное семейство совершенных относительно $\mathscr{P}$ подмножеств, удовлетворяющих предложению 11.7, (6). Из предложения 11.6 следует, что $\{N_i\}_{i\geqslant 1}$ есть дискретное семейство совершенных относительно $\mathscr{Q}$ подмножеств, также удовлетворяющее предложению 11.7, (6).

В силу замечания 11.4, (5) вложение $N_i \hookrightarrow X$ является $k$-ретракцией относительно $\mathscr{P} \prec \varepsilon \prec f^{-1}\sigma$. Непосредственное применение теоремы 10.5 показывает, что ограничение $f{\restriction}_{N_i}$ является $k$-эквивалентностью относительно $\theta^2$ для всех $i \geqslant 1$.

## § 13. Локальная и глобальная аксиомы

Для облегчения понимания вводимых аксиом рассмотрим, как они преломляются в кусочно линейном случае, где их содержание не затемнено техническими деталями. Пусть $\mathscr{Q}' = \{Q_i'\}$ есть PL-разбиение PL-многообразия $M^m$, $m \geqslant 2k+3$, а PL-вложенная сфера $S^l$, $l < k$, в $Q_0'$ затягивается пленкой $D^{l+1} \subset M^m$, находящейся *в общем положении к элементам разбиения*.[13] Тогда дополнение $C$ до регулярной окрестности $\mathscr{R}$ пленки $D^{l+1}$ является допустимым относительно $\mathscr{Q}'$. Достаточно общий способ перестройки $\mathscr{Q}'$ с целью улучшения связности $Q_0'$ заключается в следующем: к $Q_0'$ прибавляется $\mathscr{R}$, а из остальных элементов разбиения вычитается $\operatorname{Int}\mathscr{R}$. Однако лишь в случае, когда пленка $D^{l+1}$ мала ($D^{l+1}$ содержится во внутренности $Q_0'$), получается новое разбиение $\mathscr{Q}$, изоморфное $\mathscr{Q}'$, причем $Q_0' \cup \mathscr{R}$ будет иметь на одну образующую меньше.

В случае, когда пленка $D^{l+1}$ не содержится в одном элементе разбиения, к $Q_0'$ прибавляют меньшую копию $R$ регулярной окрестности пленки $D^{l+1}$, из остальных элементов разбиения вычитая $\operatorname{Int}\mathscr{R}$. Получается разбиение $\mathscr{Q}^\bullet$, изоморфное $\mathscr{Q}'$, но заданное не на всем многообразии $M^m$. Важным обстоятельством является то, что $\mathscr{Q}^\bullet$ может быть конечно $l$-продолжено до разбиения $\mathscr{Q}$ всего $M$. Аксиоматизируем эти и некоторые другие наблюдения следующим образом.

[13] То есть $D^{l+1} \cap Q_{i_1}' \cap \dots \cap Q_{i_s}'$ – $(\dim D^{l+1} + 1 - s)$-мерное подмногообразие.

Локальная аксиома (или аксиома $l_r$-перестройки). *Пусть*

$$\mathscr{Q}' = \{q'_\alpha \mid \alpha \in A\}$$

*есть $l_r$-разбиение $X$ при $l + r \leqslant k$ и $l < k$,*

$$T' : \mathscr{Q}' \to \widehat{\mathscr{Q}} = \{\widehat{q}_\alpha\}, \qquad T'(q'_\alpha) = \widehat{q}_\alpha,$$

*есть трансформация, $X_0 \subset X$ – ручное $Z$-множество. Тогда для любых $r+1$ элементов $\widehat{q}_i \in \widehat{\mathscr{Q}}$ с $\widehat{q}_1 \cap \dots \cap \widehat{q}_{r+1} \neq \varnothing$, для любого элемента $a \in \pi_{l-1}(E')$, $E' \rightleftharpoons q'_1 \cap \dots \cap q'_{r+1}$, существуют допустимое относительно $\mathscr{Q}'$ множество $C \in \mathscr{C}^k_X$, $X_0 \subset \operatorname{Int} C$,*[14] *$l_r$-разбиение $\mathscr{Q} = \{q_\alpha \mid \alpha \in A\}$ пространства $X$ и трансформация $T : \mathscr{Q} \to \widehat{\mathscr{Q}}$, $T(q_\alpha) = \widehat{q}_\alpha$, такие, что*

(i) *если $\widehat{q}_\alpha \notin \{\widehat{q}_1, \dots, \widehat{q}_{r+1}\}$, то $q_\alpha = q'_\alpha$, $T(q_\alpha) = T'(q'_\alpha)$ и $q'_\alpha \subset C$;*

(ii) *$E' \cap C$ содержится в $E \rightleftharpoons q_1 \cap \dots \cap q_{r+1}$, а вложение $E' \cap C \overset{\Psi}{\hookrightarrow} E$ является $(l-1)$-эквивалентностью;*

(iii) *существует элемент $b \in \pi_{l-1}(E' \cap C)$, который свободно гомотопен элементу $a$ в $E'$*[15] *и при вложении $E' \cap C \hookrightarrow E$ переходит в нулевой элемент.*

Отметим, что название введенной аксиомы объясняется свойством (i): перестройка осуществляется в малой окрестности $q_1$.

Локализовать перестройку в следующей аксиоме нельзя по принципиальным соображениям. Сначала дадим ряд необходимых определений.

Определение 13.1. Пусть $0 \leqslant l < k$. Вложение $E \hookrightarrow G$, где $E, G \in \mathscr{C}_X$, является

(1) *элементарной $l$-эквивалентностью*, если $G \setminus \operatorname{Int} E$ $l$-связно, а $\operatorname{Bd}_G(E) = \operatorname{Bd}_G(G \setminus \operatorname{Int} E)$ непусто и является $(l-1)$-связным;

(2) *простой $l$-эквивалентностью*, если существует конечная последовательность $E = E_0 \hookrightarrow E_1 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow E_n = G$ элементарных $l$-эквивалентностей.

В силу теоремы 2.11 любая элементарная $l$-эквивалентность является $l$-эквивалентностью.

Определение 13.2. Разбиение $\mathscr{Q}_G$ множества $G \in \mathscr{C}^k_X$ называется *элементарным $l$-продолжением* разбиения $\mathscr{Q}_E$ множества $E \in \mathscr{C}^k_X$, $E \subset G$, $0 \leqslant l < k$, если

(3) вложение $E \hookrightarrow G$ является элементарной $l$-эквивалентностью;

(4) $\mathscr{Q}_E \subset \mathscr{Q}_G$ и $\mathscr{Q}_G \setminus \mathscr{Q}_E$ состоит из одного элемента $q'_0 = G \setminus \operatorname{Int} E$.

Соответствие $T_G : \mathscr{Q}_G \to \widehat{\mathscr{Q}}$ называется *элементарным $l$-продолжением* соответствия $T_E : \mathscr{Q}_E \to \widehat{\mathscr{Q}}$, если дополнительно к определению 13.2 имеем $T_E = T_G \restriction_{\mathscr{Q}_E}$. Усиление введенного понятия возникает, если от $T_E$ к $T_G$ можно перейти за конечное число элементарных $l$-продолжений.

[14] И тем самым естественное вложение $\Psi' : E' \cap C \to E'$ индуцирует изоморфизм гомотопических групп $\pi_i$ при $i < l$.

[15] Элементы $a$ и $b$ *свободно гомотопны в $E$*, если любые их представители гомотопны в $E$.

Определение 13.3. Разбиение $\mathscr{Q}_G$ множества $G \in \mathscr{C}_X^k$ называется *конечным $l$-продолжением* разбиения $\mathscr{Q}_E$ множества $E \in \mathscr{C}_X^k$, $E \subset G$, $0 \leqslant l < k$, если существует конечная последовательность разбиений $\mathscr{Q}_0 = \mathscr{Q}_E, \mathscr{Q}_1, \dots, \mathscr{Q}_m = \mathscr{Q}_G$, каждое последующее из которых является элементарным $l$-продолжением предыдущего.[16]

Соответствие $T_G\colon \mathscr{Q}_G \to \widehat{\mathscr{Q}}$ называется *конечным $l$-продолжением* соответствия $T_E\colon \mathscr{Q}_E \to \widehat{\mathscr{Q}}$, если существует конечная последовательность соответствий $T_0 = T_E, T_1, \dots, T_m = T_G$, каждая последующая из которых является элементарным $l$-продолжением предыдущей.

Фиксируем совершенное отображение $f\colon X \to Y$, для которого $\mathscr{H}_f \subset X$ есть счетное объединение ручных $Z$-множеств.

Глобальная аксиома (или аксиома $l$-перестройки). *Пусть $(\mathscr{Q}', T', \beta')$ – тройка, в которой $\mathscr{Q}' = \{q'_\alpha \mid \alpha \in A\}$ есть $l$-разбиение $X$, $T'\colon \mathscr{Q}' \to \widehat{\mathscr{Q}}$, $T'(q'_\alpha) = \widehat{q}_\alpha$, есть трансформация разбиений, а $\beta'\colon X \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$ есть аккомпанемент $T'$, являющийся $k$-эквивалентностью относительно $\theta \in \operatorname{cov}\mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$, $\mathscr{N}_{\widehat{\mathscr{Q}}} \prec \theta$.*

*Тогда для любого ручного $Z$-множества $X_0 \subset X$ и для любого элемента $a \in \pi_l(q'_{\alpha_0})$, $q'_{\alpha_0} \in \mathscr{Q}'$, существуют допустимое относительно $\mathscr{Q}'$ множество $C \in \mathscr{C}_X^k$, $X_0 \subset \operatorname{Int} C$, и тройка $\bigl(\mathscr{Q},\ T\colon \mathscr{Q} \to \widehat{\mathscr{Q}},\ \beta\colon X \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle\bigr)$, в которой $\mathscr{Q}$ есть разбиение $X$, $T$ есть соответствие разбиений, а $\beta$ есть аккомпанемент $T$, такие, что*

(a) *существуют $l$-разбиение $\mathscr{Q}^\bullet = \{q^\bullet_\alpha \mid \alpha \in A\} \subset \mathscr{Q}$ конструктивного множества $E \in \mathscr{C}_X^k$, $E \supset C$, и трансформация $T^\bullet\colon \mathscr{Q}^\bullet \to \widehat{\mathscr{Q}}$, $T^\bullet(q^\bullet_\alpha) = \widehat{q}_\alpha$, $C$-эквивалентная $T'$, которая допускает конечное $l$-продолжение в соответствие $T$;*

(b) *$\beta = \beta'$ на $C$ и $\operatorname{dist}(\beta, \beta') \prec \theta^2$;*

(c) *$\beta(X \setminus C) \subset \mathrm{N}(\langle\widehat{q}_{\alpha_0}\rangle; \theta^4)$;*

(d) *$q'_{\alpha_0} \cap C \subset q^\bullet_{\alpha_0}$, а вложение $q'_{\alpha_0} \cap C \hookrightarrow q^\bullet_{\alpha_0}$ является $l$-эквивалентностью;*

(e) *существует элемент $b \in \pi_l(q'_{\alpha_0} \cap C)$, который свободно гомотопен элементу $a$ в $q'_{\alpha_0}$, а при вложении $q'_{\alpha_0} \cap C \hookrightarrow q^\bullet_{\alpha_0}$ переходит в нулевой элемент.*

*Если, кроме того, известно, что $\beta'(f^{-1}(y)) \prec \omega$ для всех $y \in Y$, где $\omega \in \operatorname{cov}\mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$, то*

(f) *$\beta(f^{-1}(y)) \prec \omega^2$ для всех $y \in Y$.*

## § 14. Постулат Бествины и постулат о гомеоморфизме

Пусть $\mathscr{Q}$ есть разбиение $X$, причем его ограничение $\mathscr{R} \rightleftharpoons \mathscr{Q}\restriction_F$ на $F \in \mathscr{C}_X$ является разбиением $F$. Пусть также $T\colon \mathscr{Q} \to \widehat{\mathscr{Q}}$ есть соответствие разбиений. Несложно проверить, что правилом $q \cap F \mapsto T(q)$, $q \in \mathscr{Q}$, корректно определяется соответствие из $\mathscr{R}$ в $\widehat{\mathscr{Q}}$, называемое *ограничением соответствия $T$ на $F$* и обозначаемое через $T\restriction_F$ или $T\restriction_{\mathscr{R}}$.

[16] Отсюда следует, в частности, что вложение $E \hookrightarrow G$ является простой $l$-эквивалентностью.

Вводимый ниже постулат Бествины в самой простой ситуации утверждает, что на $X$ и $\widehat{X}$ имеется одинаковый запас $k$-разбиений.

Постулат Бествины. *Пусть* $\mathscr{Q}_0$ *есть разбиение* $F \in \mathscr{C}_X$, $F \subset_Z X$, *а* $T_0\colon \mathscr{Q}_0 \to \widehat{\mathscr{Q}}$ *есть инъективное соответствие. Требуется, чтобы для любого отображения* $\gamma\colon X_0 \to \mathscr{N}\langle\mathscr{Q}\rangle$, *определенного на ручном* $Z$*-множестве* $X_0 \subset X$, $F \subset X_0$, *такого, что* $\gamma{\restriction}_F$ *есть аккомпанемент* $T_0$, *существовала тройка* $(\mathscr{Q},\ T\colon \mathscr{Q} \to \widehat{\mathscr{Q}},\ \beta\colon X \to \mathscr{N}\langle\mathscr{Q}\rangle)$, *в которой* $\mathscr{Q}$ – $k$*-разбиение* $X$, $T$ – *трансформация, а* $\beta$ – *аккомпанемент* $T$, *обладающая следующими свойствами*:

(1) $\mathscr{Q}{\restriction}_F = \mathscr{Q}_0$ *и естественное соответствие* $\mathscr{Q}_0 \hookrightarrow \mathscr{Q}$ *является инъективным*;
(2) $T{\restriction}_F = T_0$;
(3) $\beta$ *есть* $k$*-эквивалентность и* $\beta = \gamma$ *на* $X_0$.

Хотя отслеживать $k$-эквивалентность аккомпанемента $\beta$ в процессе построений довольно сложно, но, как было отмечено во введении, совершенно необходимо.

Тройку $(\mathscr{Q}, T, \beta)$ из постулата будем называть *$k$-приемлемой*; если $\mathscr{Q}$ есть всего лишь $l_r$-разбиение $X$, то тройку $(\mathscr{Q}, T, \beta)$ будем называть *$l_r$-приемлемой*. Исходным пунктом доказательства постулата Бествины служит следующий факт.

Теорема 14.1. *Существует* 0*-приемлемая тройка* $(\mathscr{Q}, T, \beta)$.

Доказательство теоремы 14.1 осуществляется во второй части работы и основывается на аксиоматизированном варианте известной теоремы о воротнике [29].

Аксиома воротников. *Пусть* $\mathscr{Q}_0$ *есть разбиение* $F \in \mathscr{C}_X$, $F \subset_Z X$, *а* $\omega \in \operatorname{cov} X$. *Если* $\mathscr{Q}_0 \prec \omega$, *то существует такое разбиение* $\mathscr{Q}$ *пространства* $X$, $\mathscr{Q} \prec \omega$, *что* $\mathscr{Q}{\restriction}_F = \mathscr{Q}_0$ *и естественное соответствие* $\mathscr{Q}_0 \hookrightarrow \mathscr{Q}$ *является инъективным*.

Вообще говоря, разбиение $\mathscr{Q}$ из теоремы 14.1 не является даже $1_1$-разбиением. Дальнейший план доказательства постулата Бествины заключается в последовательном улучшении связностных свойств $\mathscr{Q}$ за счет перестроек его элементов, что достигается многократным применением следующих фактов, устанавливаемых в §§ 18, 19.

Теорема 14.2 (о перестройке $l_r$- в $l_{r+1}$-разбиение). *Если существует* $l_r$*-приемлемая тройка* $(\mathscr{Q}', T', \beta')$, $r + l < k + 1$, *то существует* $l_{r+1}$*-приемлемая тройка* $(\mathscr{Q}, T, \beta)$.

Теорема 14.3 (о перестройке $l$- в $(l+1)_1$-разбиение). *Если существует* $l$*-приемлемая тройка* $(\mathscr{Q}', T', \beta')$, $l < k$, *то существует* $(l+1)_1$*-приемлемая тройка* $(\mathscr{Q}, T, \beta)$.

В итоге многократного ($k(k+1)/2$ раз) применения теорем 14.2 и 14.3 мы построим требуемую постулатом Бествины $k$-приемлемую тройку.

Доказав таким образом постулат Бествины, мы тем самым найдем изоморфные $k$-разбиения на $X$ и $\widehat{X}$. В этой ситуации постулируется существование гомеоморфизма между $X$ и $\widehat{X}$ – об этом речь идет в последнем вводимом требовании.

Постулат о гомеоморфизме. *Пусть $\mathscr{P}$ и $\widehat{\mathscr{P}}$ суть $k$-разбиения $X$ и $\widehat{X}$ соответственно, $T\colon \mathscr{P} \to \widehat{\mathscr{P}}$ – их трансформация, а $X_0 \subset X$ – ручное $Z$-подмножество. Требуется, чтобы существовал такой гомеоморфизм $f\colon X \to \widehat{X}$, что*

(4) $f(p) \subseteq \mathrm{N}(Tp; \widehat{\mathscr{P}})$ *для всех* $p \in \mathscr{P}$;
(5) $f(X_0) \subset \widehat{X}$ – *ручное $Z$-подмножество.*

*Если $X = \widehat{X}$, $\mathscr{P}_0 \subset \mathscr{P} \cap \widehat{\mathscr{P}}$ и $T{\restriction}_{\mathscr{P}_0} = \mathrm{Id}$, а $X_0$ не пересекается с $\cup\,\mathscr{P}_0$, то дополнительно требуется, чтобы $f = \mathrm{Id}$ на $\cup\,\mathscr{P}_0$.*

Этот постулат будет выведен из системы аксиом во второй части работы.

# Глава 3. Улучшение связности разбиений

Приступая к процедурам *улучшения связности разбиений*, напомним, что $X$ и $\widehat{X}$ по-прежнему будут абстрактными $\nu^k$-конструктивными $\mathrm{AE}(k)$-пространствами, а все встречающиеся разбиения – удобными. Через $\widehat{\mathscr{Q}}$ всегда будем обозначать удобное $k$-разбиение $\widehat{X}$ с полным нервом $\mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$, который в силу следствия 10.4, (4) есть $\mathrm{AE}(k)$.

## § 15. Соединение разбиений

Обсудим возможность собирать искомую трансформацию из трансформаций, определенных на подмножествах. Для этого введем необходимые понятия.

Определение 15.1. Пусть $F_1, F_2 \in \mathscr{C}_X$ и $X_0 \subset F_1 \cap F_2$ (допускается случай $X_0 = \varnothing$). Скажем, что трансформации $T_i\colon \mathscr{Q}_i \to \widehat{\mathscr{Q}}$, заданные на $F_i$, $i = 1, 2$, являются *$X_0$-эквивалентными*, если $(T_1)^{-1}(\widehat{q}) \cap X_0 = (T_2)^{-1}(\widehat{q}) \cap X_0$ для любого элемента $\widehat{q} \in \widehat{\mathscr{Q}}$.

Предложение 15.2. *Пусть $T'\colon \mathscr{Q}' \to \widehat{\mathscr{Q}}$ есть трансформация, заданная на $N \in \mathscr{C}^k_X$, а $T_\gamma\colon \mathscr{Q}_\gamma \to \widehat{\mathscr{Q}}$, $\gamma \geqslant 1$, суть трансформации, заданные на $N_\gamma \in \mathscr{C}^k_X$. Если $\{N_\gamma\}_{\gamma \geqslant 1}$ есть дискретное семейство $N$, а $T_\gamma$ и $T'$ являются $\mathrm{Bd}\, N_\gamma$-эквивалентными для всех $\gamma \geqslant 1$, то существуют единственные разбиение $\mathscr{Q}$ множества $N$ и трансформация $T\colon \mathscr{Q} \to \widehat{\mathscr{Q}}$, $\bigl(N \setminus \bigsqcup \mathrm{Int}\, N_\gamma\bigr)$-эквивалентная $T'$, ограничение которой на каждое $N_\gamma$ совпадает с $T_\gamma$.*

Указание. Пусть $\widehat{\mathscr{Q}} = \{\widehat{q}_\alpha\}$, $\mathscr{Q}_\gamma = \{q^\gamma_\alpha\}$, а $\mathscr{Q}' = \{q'_\alpha\}$, причем $T_\gamma(q^\gamma_\alpha) = \widehat{q}_\alpha$, а $T'(q'_\alpha) = \widehat{q}_\alpha$. Для $\widehat{q}_\alpha \in \widehat{\mathscr{Q}}$ через $q_\alpha$ обозначим $\bigl(q'_\alpha \setminus \bigsqcup \{\mathrm{Int}\, N_\gamma \mid \gamma\}\bigr) \cup \bigl\{\bigcup q^\gamma_\alpha \mid \gamma\bigr\}$. Искомое разбиение $\mathscr{Q}$ есть $\{q_\alpha \mid \widehat{q}_\alpha \in \widehat{\mathscr{Q}}\}$, а искомая трансформация $T$ задается формулой $T(q_\alpha) = \widehat{q}_\alpha$.

Назовем разбиение $\mathscr{Q}$ множества $N$, описанное в предложении 15.2, *соединением разбиений* $\mathscr{Q}'$ и $\{\mathscr{Q}_\gamma\}$, а трансформацию $T$ – *соединением трансформаций* $T'$ и $\{T_\gamma\}$. Опишем ситуации, в которых можно будет гарантировать, что свойства связности разбиения $\mathscr{Q}$ не хуже, чем у разбиений $\mathscr{Q}'$ и $\{\mathscr{Q}_\gamma\}$. Будем предполагать до конца параграфа, что $\{N_\gamma\}_{\gamma\geqslant 1}$ есть дискретное семейство совершенных относительно $\mathscr{Q}'$ подмножеств $N$, удовлетворяющее предложению 11.7, (6), а разбиения $\mathscr{Q}'$ и $\{\mathscr{Q}_\gamma\}$ являются $l_r$-разбиениями при $l+r\leqslant k+1$.

Предложение 15.3. *Соединение* $\mathscr{Q}=\{q_\alpha\}$ *разбиений*

$$\mathscr{Q}'=\{q'_\alpha\} \quad u \quad \bigl\{\mathscr{Q}_\gamma=\{q^\gamma_\alpha\}\bigr\}$$

*есть* $l_r$*-разбиение.*

Указание. Предложение 15.3 легко следует из замечания 11.4 о свойствах совершенных множеств и теоремы 2.12.

Предложение 15.4. *Если* $l+r\leqslant k$ *и для любых* $r+1$ *элементов* $\widehat{q}_i\in\widehat{\mathscr{Q}}$ *с* $\widehat{q}_1\cap\dots\cap\widehat{q}_{r+1}\neq\varnothing$ *существует такой номер* $\gamma_0\geqslant 1$, *что* $q_1^{\gamma_0}\cap\dots\cap q_{r+1}^{\gamma_0}\in\mathrm{AE}(l)$, *а* $(q'_1\cap\dots\cap q'_{r+1})\cap N_\gamma=q_1^\gamma\cap\dots\cap q_{r+1}^\gamma$ *для всех* $\gamma\neq\gamma_0$, *то соединение* $\mathscr{Q}$ *разбиений* $\mathscr{Q}'$ *и* $\{\mathscr{Q}_\gamma\}$ *есть* $l_{r+1}$*-разбиение.*

Доказательство. Так как в силу предложения 15.3 $\mathscr{Q}$ является $l_r$-разбиением, то достаточно проверить, что $q_1\cap\dots\cap q_{r+1}\in\mathrm{C}^{l-1}$. Если $\gamma_0\geqslant 1$ – номер из условия, то

(1) $q_1\cap\dots\cap q_{r+1}=(q'_1\cap\dots\cap q'_{r+1}\setminus\operatorname{Int}N_{\gamma_0})\cup(q_1^{\gamma_0}\cap\dots\cap q_{r+1}^{\gamma_0})$.

В силу совершенности $N_{\gamma_0}$ вложение

$$q'_1\cap\dots\cap q'_{r+1}\cap\operatorname{Bd}N_{\gamma_0}\hookrightarrow q'_1\cap\dots\cap q'_{r+1}\setminus\operatorname{Int}N_{\gamma_0}$$

является $(k-r-1)$-эквивалентностью и, следовательно, $(l-1)$-эквивалентностью, так как $k-r-1\geqslant l-1$ . Отсюда и из (1) следует, что вложение $q_1\cap\dots\cap q_{r+1}\cap\operatorname{Bd}N_{\gamma_0}\hookrightarrow q_1\cap\dots\cap q_{r+1}\setminus\operatorname{Int}N_{\gamma_0}$ является $(l-1)$-эквивалентностью. Так как $q_1^{\gamma_0}\cap\dots\cap q_{r+1}^{\gamma_0}\in\mathrm{AE}(l)$, то отсюда и из теоремы 2.11 следует, что вложение $q_1^{\gamma_0}\cap\dots\cap q_{r+1}^{\gamma_0}\hookrightarrow q_1\cap\dots\cap q_{r+1}$ является $(l-1)$-эквивалентностью, а $q_1\cap\dots\cap q_{r+1}\in\mathrm{C}^{l-1}$.

Предложение 15.5. *Пусть* $\mathscr{Q}'=\{q'_\alpha\}$ *и* $\bigl\{\mathscr{Q}_\gamma=\{q^\gamma_\alpha\}\bigr\}$ *являются* $l$*-разбиениями,* $l<k$, *а для любого* $\alpha\in A$ *существует такое* $C_\alpha\in\mathscr{C}^k_X$, $C_\alpha\subset q'_\alpha\cap q_\alpha$, *что в естественно порожденной диаграмме*

$$q'_\alpha\overset{\Psi'_\alpha}{\hookleftarrow}C_\alpha\overset{\Psi_\alpha}{\hookrightarrow}q_\alpha$$

*вложение* $\Psi'_\alpha$ *индуцирует изоморфизм гомотопических групп* $\pi_i$, $i\leqslant l$, *а* $\Psi_\alpha$ *есть* $l$*-эквивалентность. Пусть также для любой образующей* $\sigma\in\pi_l(q'_\alpha)$ *существуют индекс* $\gamma\geqslant 1$ *и элементы* $a_\gamma\in\pi_l(q'_\alpha\cap N_\gamma)$ *и* $b_\gamma\in\pi_l(C_\alpha\cap N_\gamma)$ *такие, что*

(2) $\sigma$ *и* $a_\gamma$ *свободно гомотопны в* $q'_\alpha$, $a_\gamma$ *и* $b_\gamma$ *свободно гомотопны в* $q'_\alpha\cap N_\gamma$, $b_\gamma$ *свободно гомотопен нулю в* $q^\gamma_\alpha$.[17]

*Тогда соединение* $\mathscr{Q}$ *разбиений* $\mathscr{Q}'$ *и* $\{\mathscr{Q}_\gamma\}$ *есть* $(l+1)_1$*-разбиение.*

[17] Легко видеть, что элемент $a_\gamma$, естественно, лежит в $\pi_l(q'_\alpha)$, а $b_\gamma$ можно рассматривать как элемент $\pi_l(q'_\alpha\cap N_\alpha)$ и $\pi_l(q^\gamma_\alpha)$.

Доказательство. В силу предложения 15.3 $\mathscr{Q}$ является $l$-разбиением. Поэтому осталось установить, что $q_\alpha \in \mathrm{C}^l$ для всех $\alpha \in A$, для чего достаточно проверить, что $(\Psi_\alpha)_*(g) = 0$ для любого $g \in \pi_l(C_\alpha)$ такого, что $(\Psi'_\alpha)_*(g)$ есть образующая группы $\pi_l(q'_\alpha)$, скажем $\sigma$.

Далее используем, что $b_\gamma \simeq a_\gamma$ в $q'_\alpha \cap N_\gamma$, $a_\gamma \simeq \sigma \simeq g$ в $q'_\alpha$. Отсюда и из $(\Psi'_\alpha)_*(g) = \sigma$ следует, что $b_\gamma$ и $g$ свободно гомотопны в $q'_\alpha$. Но в силу предложения 2.14 $\Psi'_\alpha$ является $(l+1)$-ретракцией. Поэтому $b_\gamma$ и $g$ свободно гомотопны в $C_\alpha$ и, тем самым, в $q_\alpha$. Так как $q^\gamma_\alpha$ содержится в $q_\alpha$, а $b_\gamma$ свободно гомотопен нулю в $q^\gamma_\alpha$, то $b_\gamma$ свободно гомотопен нулю в $q_\alpha$. Следовательно, $g \simeq b_\gamma \simeq 0$ в $q_\alpha$.

Выделим в чистом виде факт, использованный в доказательстве предложения 15.5.

Предложение 15.6. *Пусть $s < k$, а также заданы такие $E, E', C \in \mathscr{C}_X$, что $C \subset E \cap E'$, и в естественно порожденной диаграмме*

$$E' \overset{\Psi'}{\hookleftarrow} C \overset{\Psi}{\hookrightarrow} E$$

*вложение $\Psi'$ индуцирует изоморфизм гомотопической группы $\pi_s$, а $\Psi$ есть $s$-эквивалентность. Тогда если для любой образующей $\sigma \in \pi_s(E')$ существуют элементы $a_\gamma \in \pi_s(E' \cap N_\gamma)$ и $b_\gamma \in \pi_s(C \cap N_\gamma)$, $\gamma \geqslant 1$, такие, что $\sigma$ и $a_\gamma$ свободно гомотопны в $E'$, $a_\gamma$ и $b_\gamma$ свободно гомотопны в $E' \cap N_\gamma$, $b_\gamma$ свободно гомотопен нулю в $E \cap N_\gamma$, то $\pi_s(E) = 0$.*

## § 16. Слабая перестройка $l_r$-разбиения

В качестве непосредственного следствия из локальной аксиомы и аксиомы уединения получим *теорему о слабой перестройке $l_r$- в $l_{r+1}$-разбиение.*

Теорема 16.1 (о слабой перестройке $l_r$-разбиения). *Пусть $\big(\mathscr{Q}',\ T'\colon \mathscr{Q}' \to \widehat{\mathscr{Q}} = \{\widehat{q}_\alpha\},\ \beta'\colon X \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle\big)$ есть тройка, в которой $\mathscr{Q}' = \{q'_\alpha\}$ – $l_r$-разбиение $X$ при $l + r \leqslant k$ и $0 \leqslant l < k$, $T'(q'_\alpha) = \widehat{q}_\alpha$ – трансформация, а $\beta'$ – аккомпанемент $T'$. Тогда для любого ручного $Z$-множества $X_0 \subset X$ и для любых элементов $\widehat{q}_i \in \widehat{\mathscr{Q}}$, $\widehat{q}_1 \cap \dots \cap \widehat{q}_{r+1} \neq \varnothing$, существует тройка*

$$\big(\mathscr{Q},\ T\colon \mathscr{Q} \to \widehat{\mathscr{Q}},\ \beta\colon X \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle\big),$$

*в которой $\mathscr{Q} = \{q_\alpha\}$ – $l_r$-разбиение $X$, $T(q_\alpha) = \widehat{q}_\alpha$ – трансформация, а $\beta$ – аккомпанемент $T$, такая, что*

(1) $q_1 \cap \dots \cap q_{r+1} \in \mathrm{AE}(l)$;
(2) *$T$ и $T'$ являются $X_0$-эквивалентными, а $\beta$ совпадает с $\beta'$ на $X_0$;*
(3) *если $\widehat{q}_\alpha \notin \{\widehat{q}_1, \dots, \widehat{q}_{r+1}\}$, то $q_\alpha = q'_\alpha$, $T(q_\alpha) = T'(q'_\alpha)$ и $\beta = \beta'$ на $q_\alpha$;*
(4) $\operatorname{dist}(\beta, \beta') \prec \mathscr{N}^2_{\widehat{\mathscr{Q}}}$.

Замечание. Теорема о сильной перестройке $l_r$- в $l_{r+1}$-разбиение будет отличаться от теоремы 16.1 требованием на $\mathscr{Q}$ быть $l_{r+1}$-разбиением.

Доказательство. Из аксиомы $(\mathscr{C})_3$ следует, что группа $\pi_{l-1}(E')$, где $E' \rightleftharpoons q'_1 \cap \dots \cap q'_{r+1} \in \mathrm{AE}(l-1)$, имеет счетное число образующих $\{\sigma_i \mid i \geqslant 2\}$. В силу предложения 12.9 существует такое дискретное семейство $\{N_i \subset X \mid i \geqslant 1\}$ совершенных относительно $\mathscr{Q}$ подмножеств, удовлетворяющее предложению 11.7, (6), что $X_0 \subset \operatorname{Int} N_1$. Из совершенности $N_i$ следует, что $\mathscr{Q}'_i \rightleftharpoons \mathscr{Q}'\restriction_{N_i}$ является $l_r$-разбиением пространства $N_i$, а вложение $N_i \cap E' \hookrightarrow E'$ есть $(k-r-1)$-эквивалентность. Так как $l-1 \leqslant k-r-1$, то для любого $i \geqslant 2$

(5) существует элемент $a_i \in \pi_{l-1}(N_i \cap E')$, свободно гомотопный элементу $\sigma_i$ в $E'$.

Рассмотрим случай $i \geqslant 2$. Трансформация $T'_i \colon \mathscr{Q}'_i \to \widehat{\mathscr{Q}}$, $T'_i(q'_\alpha \cap N_i) = \widehat{q}_\alpha$, элемент $a_i \in \pi_{l-1}(N_i \cap E')$ и ручное $Z$-множество $X_i \rightleftharpoons \operatorname{Bd} N_i \subset N_i$ (в силу предложения 12.6) удовлетворяют условиям локальной аксиомы. В результате ее применения построим допустимое относительно $\mathscr{Q}'_i$ множество $C_i$, $X_i \subset \operatorname{Int} C_i$, удобное $l_r$-разбиение $\mathscr{Q}_i = \{q^i_\alpha \mid \alpha \in A\}$ пространства $N_i$, трансформацию $T_i \colon \mathscr{Q}_i \to \widehat{\mathscr{Q}}$, $T_i(q^i_\alpha) = \widehat{q}_\alpha$, и элемент $b_i \in \pi_{l-1}(E' \cap C_i)$ такие, что будут выполнены заключения (i)–(iii) этой аксиомы. Легко видеть, что существует аккомпанемент $\beta_i \colon N_i \to \mathscr{N}\langle \widehat{\mathscr{Q}} \rangle$ трансформации $T_i$, совпадающий с $\beta\restriction_{N_i}$ на $C_i$.

После этого в качестве искомого разбиения $\mathscr{Q} = \{q_\alpha\}$ возьмем соединение разбиений $\mathscr{Q}'$ и $\{\mathscr{Q}_i \mid i \geqslant 2\}$, которое в силу предложения 15.3 является $l_r$-разбиением. Искомая трансформация $T$ задается формулой $T(q_\alpha) = \widehat{q}_\alpha$, а аккомпанемент $\beta$ трансформации $T$ – формулой $\beta = \beta_i$ на $N_i$ и $\beta = \beta'$ на $X \setminus \bigsqcup \{\operatorname{Int} N_i \mid i \geqslant 2\}$. Из явных формул для $q_\alpha$ (см. предложение 15.2) и $\beta$ следуют (2), (3).

В силу допустимости $C_i$ относительно $\mathscr{Q}'_i$ и предложения 11.7, (6)

$$C \rightleftharpoons \Bigl(X \setminus \bigsqcup \{\operatorname{Int} N_i \mid i \geqslant 2\}\Bigr) \cup \bigcup \{C_i \mid i \geqslant 2\}$$

является допустимым множеством относительно $\mathscr{Q}'$. Из (5) и свойств (ii), (iii) локальной аксиомы следует, что естественные вложения $E' \cap C \overset{\Psi'}{\hookrightarrow} E'$ и $E' \cap C \overset{\Psi}{\hookrightarrow} E$, где $E \rightleftharpoons q_1 \cap \dots \cap q_{r+1}$, удовлетворяют условию предложения 15.6. Следовательно, $E = q_1 \cap \dots \cap q_{r+1} \in \mathrm{AE}(l)$.

Из (3) следует, что для установления (4) достаточно оценить $\operatorname{dist}(\beta(x), \beta'(x))$, где $x \in q_i \cap q'_j$, $1 \leqslant i, j \leqslant r+1$. Но $\beta(x) \in \mathring{\mathrm{St}}\langle \widehat{q}_i \rangle$, $\beta'(x) \in \mathring{\mathrm{St}}\langle \widehat{q}_j \rangle$, а вершины $\langle \widehat{q}_i \rangle$ и $\langle \widehat{q}_j \rangle$ соединяются ребром. Это влечет $\operatorname{dist}(\beta, \beta') \prec \mathscr{N}^2_{\widehat{\mathscr{Q}}}$.

## § 17. “Join crowd” перестройки

Составной частью любой перестройки $l$-разбиения в $(l+1)_1$-разбиение является процесс инкорпорирования элементов, который в [10; 2.7.6, этап 6] назывался движением “join crowd”. Мы сочли уместным сохранить колорит этого термина.

**17.1. Элементарная “join crowd” перестройка.** Для формулировки теоремы об элементарной “join crowd” перестройке зафиксируем $\mathscr{Q}_E$ – $(l+1)_1$-разбиение $E \in \mathscr{C}^k_X$, $0 \leqslant l < k$, $T_E \colon \mathscr{Q}_E \to \widehat{\mathscr{Q}}$ – инъективное соответствие,

$T_G\colon \mathscr{Q}_G \to \widehat{\mathscr{Q}}$ – соответствие, заданное на $G \in \mathscr{C}^k_X$, $E \subset G$, являющееся элементарным $l$-продолжением $T_E$.

Пусть $q_0$ есть такой (единственный) элемент $\mathscr{Q}_E$, что $T_E(q_0) = T_G(q_0')$ (напомним, что $q_0' = G \setminus \operatorname{Int} E \in \mathscr{Q}_G$), а $p_0 \rightleftharpoons q_0 \cup q_0'$. Через $\mathscr{P} = \{p_\alpha\}$ обозначим укрупнение $\{p_0\} \cup \{q \in \mathscr{Q}_E \mid q \neq q_0\}$ разбиения $\mathscr{Q}_G$, а через $R\colon \mathscr{P} \to \widehat{\mathscr{Q}}$ – соответствие, заданное формулой $R(p_0) = T_E(q_0) = T_G(q_0')$ и $R(q) = T_E(q) = T_G(q)$ для $q \in \mathscr{Q}_E \setminus \{q_0\} = \mathscr{Q}_G \setminus \{q_0, q_0'\}$.

Теорема 17.1. *Если в ситуации, описанной выше, нерв $\mathscr{Q}_E$ совпадает со звездой вершины $\langle q_0\rangle$, то для любого ручного $Z$-множества $X_0 \subset G$ существуют $(l+1)_1$-разбиение $\mathscr{Q}$ множества $G$ и соответствие $T\colon \mathscr{Q} \to \widehat{\mathscr{Q}}$ такие, что соответствия $T$ и $R$ являются $X_0$-эквивалентными.*

Доказательство. Пусть $N_0$ и $N_1 \rightleftharpoons G \setminus \operatorname{Int} N_0$ – такие совершенные относительно $\mathscr{P}$ множества, подчиняющиеся условию (v) из аксиомы уединения, что $X_0 \subset \operatorname{Int} N_0$. После этого каждому $p \in \mathscr{P}$ сопоставим элемент

$$q(p) = \begin{cases} p \cup N_1, & \text{если } p = p_0,\\ p \setminus \operatorname{Int} N_1 = p \cap N_0, & \text{если } p \neq p_0.\end{cases}$$

Ясно, что ограничения разбиений $\mathscr{P}$ и $\mathscr{Q} \rightleftharpoons \{q(p) \mid p \in \mathscr{P}\}$ на $N_0$ совпадают. Следовательно, $\mathscr{Q}\restriction_{X_0} = \mathscr{P}\restriction_{X_0}$. Так как нерв $\mathscr{Q}_E$ совпадает со звездой вершины $\langle q_0\rangle$, то в силу следствия 10.4, (4) $E \in \mathrm{AE}(l+1)$. Поскольку $E \hookrightarrow G$ есть $l$-эквивалентность, то $G \in \mathrm{AE}(l+1)$. Отсюда и из совершенности $N_1$ относительно $\mathscr{P}$ следует $N_1 \in \mathrm{AE}(l+1)$, а также $(k-1)$-эквивалентность вложения $p_0 \cap N_0 \cap N_1 \hookrightarrow q(p_0) \setminus \operatorname{Int} N_1$. В силу теоремы 2.11 это влечет $(k-1)$-эквивалентность вложения $N_1 \hookrightarrow q(p_0)$. Следовательно, $\pi_l(q(p_0)) = 0$ и, тем самым, $q(p_0) \in \mathrm{AE}(l+1)$.

Изучим теперь связность пересечения $D \rightleftharpoons q(p_{i(1)}) \cap \dots \cap q(p_{i(a)})$, $1 \leqslant a \leqslant k+1$. Прежде всего заметим, что если $q(p_{i(s)}) \neq q(p_0)$ для всех $s \leqslant a$, то $D = \bigcap \{q(p_{i(s)}) \mid 1 \leqslant s \leqslant a\} \setminus \operatorname{Int} N_1$ имеет ту же связность, что и $\bigcap \{q(p_{i(s)}) \mid 1 \leqslant s \leqslant a\}$ в силу совершенности $N_0$. Поэтому разбиение $\mathscr{Q} \setminus \{q(p_0)\}$ есть $(l+1)_1$-разбиение.

Рассмотрим оставшийся случай, когда $q(p_{i(1)}) = q(p_0)$ и $a > 1$. Легко видеть, что $D = A \cup B$, где

$$A \rightleftharpoons N_0 \cap p_0 \cap \bigcap \{q(p_{i(s)}) \mid 2 \leqslant s \leqslant a\},$$
$$B \rightleftharpoons N_0 \cap N_1 \cap \bigcap \{q(p_{i(s)}) \mid 2 \leqslant s \leqslant a\}.$$

Так как $\mathscr{P} \setminus \{p_0\}$ есть $(l+1)_1$-разбиение, а $\mathscr{P}$ есть $l$-разбиение, то

$$p_0 \cap \bigcap \{q(p_{i(s)}) \mid 2 \leqslant s \leqslant a\} \in \mathrm{AE}(\min\{l, k+1-a\}),$$
$$\bigcap \{q(p_{i(s)}) \mid 2 \leqslant s \leqslant a\} \in \mathrm{AE}(\min\{l, k+2-a\}).$$

Тогда в силу совершенности $N_i$ имеем

$$A \in \mathrm{AE}(\min\{l, k+1-a\})$$
$$B \in \mathrm{AE}(\min\{k+1-(a-1), \min\{l, k+2-a\}\}) \subset \mathrm{AE}(\min\{l, k+2-a\}).$$

Поскольку
$$A \cap B = N_0 \cap N_1 \cap p_0 \cap \bigcap \{q(p_{i(s)}) \mid 2 \leqslant s \leqslant a\},$$
то $A \cap B \in \mathrm{AE}(\min\{l, k+1-a\})$. В силу теоремы 2.12 о связности объединения имеем $D = A \cup B \in \mathrm{AE}(\min\{l, k+1-a\})$, следовательно, $\mathscr{Q}$ является $(l+1)_1$-разбиением.

Искомое соответствие $T$, $X_0$-эквивалентное $R$, определяется формулой
$$T(q(p)) = R(p),$$
что следует из изоморфности $\mathscr{N}\langle \mathscr{P} \rangle$ и $\mathscr{N}\langle \mathscr{Q} \rangle$.

**17.2. Конечная “join crowd” перестройка.** Пусть имеются $(l+1)_1$-разбиение $\mathscr{Q}_E$ множества $E \in \mathscr{C}^k_X$, $l < k$, и трансформация разбиений $T_E\colon \mathscr{Q}_E \to \widehat{\mathscr{Q}}$. Рассмотрим тройку
$$\bigl(\mathscr{Q}_G,\ T_G\colon \mathscr{Q}_G \to \widehat{\mathscr{Q}},\ \beta_G\colon G \to \mathscr{N}\langle \widehat{\mathscr{Q}} \rangle\bigr),$$
в которой $\mathscr{Q}_G$ есть разбиение $G \in \mathscr{C}^k_X$, $E \subset G$, соответствие $T_G$ получено конечным $l$-продолжением из $T_E$, а $\beta_G$ есть аккомпанемент $T_G$. Для определенности полагаем $\mathscr{Q}_G \rightleftharpoons \mathscr{Q}_E \sqcup \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, а $\widehat{a}_i \rightleftharpoons T_G(a_i) \in \widehat{\mathscr{Q}}$.

Рассмотрим наименьший подполиэдр $\mathfrak{K} \subset \mathscr{N}\langle \widehat{\mathscr{Q}} \rangle$ ($\mathfrak{K}_i \subset \mathscr{N}\langle \widehat{\mathscr{Q}} \rangle$), содержащий все вершины звезд $\mathrm{St}\langle \widehat{a}_i \rangle$, $i \leqslant m$ (звезды $\mathrm{St}\langle \widehat{a}_i \rangle$).[18] Поскольку элементы $q \in \mathscr{Q}_E$, $\beta_G$-образ которых далек от $\mathfrak{K}$, в процессе конечной “join crowd” перестройки не будут меняться, то подполиэдр $\mathfrak{K}$ естественно назвать *контролирующим конечную “join crowd” перестройку*. Отметим несложные свойства таких подполиэдров:

($\alpha$) $\mathfrak{K}_i$ содержится в элементе $\mathscr{N}^2_{\widehat{\mathscr{Q}}}$, а $\mathfrak{K} \subset \mathrm{N}\bigl(\beta_G(G \setminus \operatorname{Int} E); \mathscr{N}^2_{\widehat{\mathscr{Q}}}\bigr)$;

($\beta$) $\beta_G(G \setminus \operatorname{Int} E) \subset \mathfrak{K}$.

Фиксируем совершенное отображение $f\colon G \to Y$, для которого

(1) $\mathscr{H}_f \subset G$ есть счетное объединение ручных $Z$-множеств.

Теорема 17.2. *В описанной выше ситуации для любого ручного $Z$-подмножества $X_0 \subset E$ существует тройка $\bigl(\mathscr{Q},\ T\colon \mathscr{Q} \to \widehat{\mathscr{Q}},\ \beta\colon G \to \mathscr{N}\langle \widehat{\mathscr{Q}} \rangle\bigr)$, в которой $\mathscr{Q}$ есть $(l+1)_1$-разбиение $G$, $T$ – трансформация разбиений, а $\beta$ – аккомпанемент $T$, такая, что*

$(\mathrm{a})_{\mathrm{f}}$ $\beta = \beta_G$ *на* $X_0$;[19]

$(\mathrm{b})_{\mathrm{f}}$ $\operatorname{dist}(\beta, \beta_G) \prec \mathfrak{K}$;

$(\mathrm{c})_{\mathrm{f}}$ *трансформации $T$ и $T_E$ являются $X_0$-эквивалентными*;

$(\mathrm{d})_{\mathrm{f}}$ *если $q \in \mathscr{Q}_G$ и $\beta_G(q) \cap \mathfrak{K} = \varnothing$, то $q \in \mathscr{Q}$, $T(q) = T_G(q)$ и $\beta\restriction_q = \beta_G\restriction_q$*;

$(\mathrm{e})_{\mathrm{f}}$ *если дополнительно известно, что для некоторого покрытия $\omega \in \operatorname{cov} \mathscr{N}\langle \widehat{\mathscr{Q}} \rangle$, $\mathscr{N}^5_{\widehat{\mathscr{Q}}} \prec \omega$, справедливо $\beta_G(f^{-1}(y)) \prec \omega$ для всех $y \in Y$, то $\beta(f^{-1}(y)) \prec \omega$ для всех $y \in Y$.*

Так как $\mathfrak{K} = \bigcup_{i=1}^m \mathfrak{K}_i$, то теорему 17.2 достаточно доказать лишь в случае $m = 1$: $\mathscr{Q}_G = \mathscr{Q}_E \sqcup \{a_1\}$, далее действовать индукцией по $m$.

---

[18] То есть дважды итерированную замкнутую симплициальную окрестность всех вершин $\langle \widehat{a}_i \rangle$, $i \leqslant m$, относительно естественной триангуляции $\mathscr{N}\langle \widehat{\mathscr{Q}} \rangle$.

[19] Индекс f есть первая буква слова “finite”.

Доказательство. Так как $T_E$ есть трансформация, то $\widehat{a}_1 = T_E(a')$ для единственного элемента $a' \in \mathscr{Q}_E$. Через $E'$ обозначим окрестность $\mathrm{N}(a'; \mathscr{Q}_E) \subset E$.

Лемма 17.3 (см. [10; 2.7]). *Пересечение $E' \cap a_1$ непусто и совпадает с $E \cap a_1$.*

Ясно, что

(i) $\mathscr{Q}_{E'} \rightleftharpoons \{q \in \mathscr{Q}_E \mid q \subset E'\}$ является $(l+1)_1$-разбиением $E'$, а нерв $\mathscr{Q}_{E'}$ совпадает со звездой вершины $\langle a' \rangle$;

(ii) соответствие $T_{E'} \rightleftharpoons T_E\restriction_{\mathscr{Q}_{E'}} : \mathscr{Q}_{E'} \to \widehat{\mathscr{Q}}$ является инъективным.

Пусть $G' \rightleftharpoons E' \cup a_1 = \bigcup \{q \in \mathscr{Q}_G \mid T_G(q) \cap \widehat{a}_1 \neq \varnothing\}$, $\mathscr{Q}_{G'} \rightleftharpoons \mathscr{Q}_{E'} \cup \{a_1\} = \mathscr{Q}_G\restriction_{G'}$. Тогда соответствие $T_{G'} \rightleftharpoons T_G\restriction_{\mathscr{Q}_{G'}} : \mathscr{Q}_{G'} \to \widehat{\mathscr{Q}}$ совпадает с $T_{E'}$ на $E'$ и $T_{G'}(a_1) = \widehat{a}_1$. Так как $T_G$ получается из $T_E$ элементарным $l$-продолжением, то из леммы 17.3 легко следует, что соответствие $T_{G'}$ получается из $T_{E'}$ также элементарным $l$-продолжением.

Через $\mathscr{P}$ обозначим укрупнение $\{a' \cup a_1\} \cup \{q \in \mathscr{Q}_{E'} \mid q \neq a'\}$ разбиения $\mathscr{Q}_{E'}$, а через $R\colon \mathscr{P} \to \widehat{\mathscr{Q}}$ – соответствие, определенное формулой $R(a' \cup a_1) = \widehat{a}_1$ и $R(q) = T_{E'}(q)$.

Так как $f$ совершенно, то следующее множество

$$D \rightleftharpoons \bigcup \bigl\{ f^{-1}(y) \mid \beta_G(f^{-1}(y)) \text{ не содержится ни в одном элементе } \mathscr{N}_{\widehat{\mathscr{Q}}} \bigr\} \subset G$$

замкнуто. Поэтому в силу (1) оно является ручным $Z$-множеством. Так как $X_1 \rightleftharpoons X_0 \cup D \subset G$ является ручным $Z$-множеством, то в силу предложения 12.6 множество $F \rightleftharpoons \mathrm{Bd}_G(G') \cup (X_1 \cap G')$ также является ручным $Z$-множеством в $G'$. Ясно, что в описанной выше ситуации применима теорема 17.1 об элементарной "join crowd" перестройке: существуют $(l+1)_1$-разбиение $\mathscr{S}$ пространства $G'$ и соответствие $S\colon \mathscr{P} \to \widehat{\mathscr{Q}}$ такие, что

(iii) разбиения $\mathscr{S}$ и $\mathscr{P}$ совпадают на $F$, а соответствие $S$ является $F$-эквивалентным соответствию $R\colon \mathscr{P} \to \widehat{\mathscr{Q}}$.

Ясно, что $\mathscr{Q}_E \setminus \mathscr{Q}_{E'}$ есть $(l+1)_1$-разбиение $C \rightleftharpoons G \setminus \mathrm{Int}_G(G')$. Так как соответствия $S$ и $R$ являются $\mathrm{Bd}_G(G')$-эквивалентными, то $\mathscr{Q} \rightleftharpoons \mathscr{S} \sqcup (\mathscr{Q}_E \setminus \mathscr{Q}_{E'})$ является $(l+1)_1$-разбиением $G$, а $T \rightleftharpoons S \cup \bigl(T_E\restriction_{\mathscr{Q}_E \setminus \mathscr{Q}_{E'}}\bigr)\colon \mathscr{Q} \to \widehat{\mathscr{Q}}$ является трансформацией разбиений. При этом будет выполнено свойство $(\mathrm{c})_{\mathrm{f}}$.

Так как $\beta_G\restriction_{G'}$ есть аккомпанемент $R$, то в силу (iii) $\beta_G\restriction_F$ есть частичный аккомпанемент $\mathscr{S}$. Поэтому в силу предложения 7.7 существует такой аккомпанемент $\beta'\colon G' \to \mathscr{N}\langle \widehat{\mathscr{Q}} \rangle$ соответствия $\mathscr{S}$, что $\beta'\restriction_F = \beta_G\restriction_F$. Так как $\beta'(G') \subset \mathrm{N}(\langle \widehat{a} \rangle; \mathscr{N}_{\widehat{\mathscr{Q}}})$, то отображение $\beta\colon G \to \mathscr{N}\langle \widehat{\mathscr{Q}} \rangle$, совпадающее с $\beta'$ на $G'$ и с $\beta_G$ на $C$, является, как несложно видеть, аккомпанементом $T$ и удовлетворяет условиям $(\mathrm{a})_{\mathrm{f}}$–$(\mathrm{b})_{\mathrm{f}}$ и $(\mathrm{d})_{\mathrm{f}}$.

Так как $\beta'$ и $\beta_G$ совпадают на любом слое $f^{-1}(y)$, который не содержится в одном элементе $(\beta_G)^{-1}(\mathscr{N}_{\widehat{\mathscr{Q}}})$, то для проверки $(\mathrm{e})_{\mathrm{f}}$ достаточно установить, что

(iv) $\beta(f^{-1}(y)) \prec \omega$ в случае, когда $\beta_G(f^{-1}(y))$ содержится в элементе $W \in \mathscr{N}_{\widehat{\mathscr{Q}}}$.

Так как подполиэдр $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1$ содержится в элементе $\mathscr{N}^2_{\widehat{\mathscr{Q}}}$, то в силу $(\mathrm{b})_{\mathrm{f}}$ имеем $\beta(f^{-1}(y)) \subset \mathrm{N}(\beta_G(f^{-1}(y)); \mathscr{N}^2_{\widehat{\mathscr{Q}}}) \subset \mathrm{N}(W; \mathscr{N}^2_{\widehat{\mathscr{Q}}})$. Но последнее множество есть элемент $\mathscr{N}^5_{\widehat{\mathscr{Q}}} \prec \omega$.

**17.3. Дискретная "join crowd" перестройка.**

Определение 17.4. Пусть $T_E\colon \mathscr{Q}_E \to \widehat{\mathscr{Q}}$ есть трансформация, заданная на $E \in \mathscr{C}^k_X$, причем $X \setminus \operatorname{Int} E$ есть тело дискретного семейства $\{H_\gamma \mid \gamma \geqslant 1\}$, где $H_\gamma \in \mathscr{C}^k_X$. Пусть $T'_\gamma\colon \mathscr{Q}'_\gamma \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$ есть соответствие между разбиением $\mathscr{Q}'_\gamma$ конструктивного множества $E_\gamma \rightleftharpoons E \cup H_\gamma \in \mathscr{C}^k_X$ и $\mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$, являющееся конечным $l$-продолжением $T_E$ при $l < k$. Тогда

($\gamma$) разбиение $\mathscr{Q}' \rightleftharpoons \mathscr{Q}_E \sqcup \bigsqcup\bigl\{\mathscr{Q}'_\gamma \setminus \mathscr{Q}_E \mid \gamma\bigr\}$ пространства $X$ и соответствие $T'\colon \mathscr{Q}' \to \widehat{\mathscr{Q}}$, заданное формулой $T' = T_E$ на $\mathscr{Q}_E$ и $T' = T'_\gamma$ на $\mathscr{Q}'_\gamma \setminus \mathscr{Q}_E$, называются *дискретными $l$-продолжениями разбиения $\mathscr{Q}_E$ и трансформации $T_E$* соответственно.

Пусть $\mathfrak{K}_\gamma \subset \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$ есть подполиэдр, контролирующий $l$-конечную перестройку $T_E$ в $T'_\gamma$. Тогда

($\delta$) семейство $\{\mathfrak{K}_\gamma \mid \gamma \geqslant 1\}$ и подполиэдр $\mathfrak{K} \rightleftharpoons \bigcup\{\mathfrak{K}_\gamma \mid \gamma \geqslant 1\} \subset \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$ будем называть *контролирующими* дискретную "join crowd" перестройку.

Из ($\alpha$) и ($\beta$) следует, что для аккомпанемента $\beta'\colon X \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$ соответствия $T'$

($\varepsilon$) $\mathfrak{K} \subset \mathrm{N}\bigl(\beta'(X \setminus \operatorname{Int} E); \mathscr{N}^2_{\widehat{\mathscr{Q}}}\bigr)$ и $\beta'(X \setminus \operatorname{Int} E) \subset \mathfrak{K}$.

Пусть $\bigl(\mathscr{Q}',\ T'\colon \mathscr{Q}' \to \widehat{\mathscr{Q}},\ \beta'\colon X \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle\bigr)$ есть тройка, в которой разбиение $\mathscr{Q}'$ пространства $X$ есть дискретное $l$-продолжение $(l+1)_1$-разбиения $\mathscr{Q}_E$, заданного на $E \in \mathscr{C}^k_X$, $l < k$; соответствие $T'$ есть дискретное $l$-продолжение трансформации $T_E$, $\beta'$ есть аккомпанемент соответствия $T'$. Фиксируем также совершенное $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображение $f\colon X \to Y$, удовлетворяющее условию (1) из п. 17.2.

Теорема 17.5. *В описанной выше ситуации для любого ручного $Z$-подмножества $X_0 \subset X$ существует тройка $\bigl(\mathscr{Q},\ T\colon \mathscr{Q} \to \widehat{\mathscr{Q}},\ \beta\colon X \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle\bigr)$, в которой $\mathscr{Q}$ есть $(l+1)_1$-разбиение $X$, $T$ есть трансформация разбиений, а $\beta$ есть аккомпанемент $T$, такая, что*

(a)$_{\mathrm{d}}$ $\beta = \beta'$ *на* $X_0$;[20]
(b)$_{\mathrm{d}}$ $\operatorname{dist}(\beta, \beta') \prec \{\mathfrak{K}_\gamma \mid \gamma \geqslant 1\}$;
(c)$_{\mathrm{d}}$ *трансформации $T$ и $T'$ являются $X_0$-эквивалентными*;
(d)$_{\mathrm{d}}$ *если $q' \in \mathscr{Q}'$ и $\beta'(q') \cap \mathfrak{K} = \varnothing$, то $q' \in \mathscr{Q}$, $T(q') = T'(q')$ и $\beta\restriction_{q'} = \beta'\restriction_{q'}$*;
(e)$_{\mathrm{d}}$ *если дополнительно $\beta'(f^{-1}(y)) \prec \omega$ для всех $y \in Y$, где $\omega \in \operatorname{cov}\mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$ и $\mathscr{N}^5_{\widehat{\mathscr{Q}}} \prec \omega$, то $\beta(f^{-1}(y)) \prec \omega^2$ для всех $y \in Y$.*

Доказательство. Ясно, что $\operatorname{Bd} H_\gamma$ является ручным $Z$-множеством $E$. В силу предложения 12.8 – следствия аксиомы уединения – существует такое дискретное семейство $\{M_\gamma \subset E\}_{\gamma \geqslant 1}$ совершенных относительно $\mathscr{Q}_E$ подмножеств, удовлетворяющее предложению 11.7, (6), что $\operatorname{Bd} H_\gamma \subset \operatorname{Int}_E M_\gamma$. Пусть $X_\gamma \rightleftharpoons M_\gamma \cup H_\gamma \in \mathscr{C}^k_X$.

Пусть $\bigl(\mathscr{Q}'_\gamma,\ T'_\gamma\colon \mathscr{Q}'_\gamma \to \widehat{\mathscr{Q}}, \beta'_\gamma\colon X_\gamma \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle\bigr)$, $\gamma \geqslant 1$, есть тройка, в которой $\mathscr{Q}'_\gamma \rightleftharpoons \mathscr{Q}'\restriction_{X_\gamma}$, $T'_\gamma = T'\restriction_{\mathscr{Q}'_\gamma}$, а $\beta'_\gamma \rightleftharpoons \beta'\restriction_{X_\gamma}$ есть аккомпанемент $T'_\gamma$. Очевидно, что

[20] Индекс d есть первая буква слова "discrete".

$\mathscr{Q}_{M_\gamma} \rightleftharpoons \mathscr{Q}_E\restriction_{M_\gamma}$ есть $(l+1)_1$-разбиение $M_\gamma$, а $T_{M_\gamma} \rightleftharpoons T_E\restriction_{M_\gamma}$ есть трансформация, которая допускает конечное $l$-продолжение до соответствия $T'_\gamma$.

Пусть $\mu \in \operatorname{cov} X$ таково, что семейство $\{\mathrm{N}(M_\gamma;\mu)\}$ дискретно в $X$. В силу совершенности $f$ следующее множество

$$D \rightleftharpoons \bigcup \bigl\{ f^{-1}(y) \mid f^{-1}(y) \text{ не содержится ни в одном элементе } \mu \bigr\} \subset X$$

замкнуто и в силу условия (1) является ручным $Z$-множеством.

Так как $X_1 \rightleftharpoons X_0 \cup D \subset X$ является ручным $Z$-множеством, то в силу предложения 12.6 $X_0^\gamma \rightleftharpoons \operatorname{Bd} X_\gamma \cup (X_1 \cap X_\gamma) \subset X_\gamma$ является ручным $Z$-множеством. Поэтому к тройке $(\mathscr{Q}'_\gamma, T'_\gamma, \beta'_\gamma)$ и $X_0^\gamma$ возможно применить теорему 17.2. Следовательно, существует тройка $\bigl(\mathscr{Q}_\gamma,\ T_\gamma\colon \mathscr{Q}_\gamma \to \widehat{\mathscr{Q}},\ \beta_\gamma\colon X_\gamma \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle\bigr)$, в которой $\mathscr{Q}_\gamma$ есть $(l+1)_1$-разбиение $X_\gamma$, $T_\gamma$ есть трансформация разбиений, а $\beta_\gamma$ есть аккомпанемент $T_\gamma$, удовлетворяющая свойствам $(\mathrm{a})_{\mathrm{f}}$–$(\mathrm{e})_{\mathrm{f}}$.

Определим разбиение $\mathscr{Q}$ как соединение разбиений $\mathscr{Q}'$ и $\{\mathscr{Q}_\gamma\}$ (см. предложение 15.2), трансформацию $T$ – как соединение $T'$ и $\{T_\gamma\}$. Аккомпанемент $\beta\colon X \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$ трансформации $T$ определяется формулами $\beta\restriction_{X_\gamma} = \beta_\gamma$ и $\beta = \beta'$ на $X \setminus \bigsqcup \operatorname{Int} X_\gamma$. Покажем, что введенные объекты являются искомыми.

Так как в силу замечания 11.4 $\mathscr{Q}'\restriction_{E\setminus\bigsqcup \operatorname{Int} M_\gamma}$ есть $(l+1)_1$-разбиение, $\mathscr{Q}'\restriction_{\operatorname{Bd} M_\gamma}$ есть $l_1$-разбиение, а $\mathscr{Q}_\gamma$ есть $(l+1)_1$-разбиение $X_\gamma$, то $\mathscr{Q}$ есть $(l+1)_1$-разбиение $X$.

Так как на множестве $D$ отображения $\beta$ и $\beta'$ совпадают, то для проверки $(\mathrm{e})_{\mathrm{d}}$ достаточно рассмотреть слои $f^{-1}(y)$, лежащие в одном из элементов $\mu$. В силу определения покрытия $\mu$ они пересекают не более одного $\{M_\gamma\}$, скажем $M_\gamma$. Так как $k > l \geqslant 0$, а $f \in \mathrm{UV}^{k-1}$, то $f^{-1}(y)$ связно. Если $\xi \in f^{-1}(y) \cap \operatorname{Bd} M_\gamma$, то

$$\beta(\xi) \in \beta(f^{-1}(y)) \subset \beta'\bigl(f^{-1}(y) \cap (X \setminus M_\gamma)\bigr) \cup \beta\bigl(f^{-1}(y) \cap M_\gamma\bigr).$$

Отсюда и из $(\mathrm{e})_{\mathrm{f}}$ следует $\beta(f^{-1}(y)) \subset \mathrm{N}(\xi;\omega) \prec \omega^2$. Если же $f^{-1}(y) \cap \operatorname{Bd} M_\gamma = \varnothing$, то либо $f^{-1}(y) \subset X \setminus M_\gamma$, либо $f^{-1}(y) \subset M_\gamma$. В первом случае $\beta(f^{-1}(y)) = \beta'(f^{-1}(y))$, во втором случае в силу $(\mathrm{e})_{\mathrm{f}}$ имеем $\beta(f^{-1}(y)) \prec \omega$. Таким образом, свойство $(\mathrm{e})_{\mathrm{d}}$ установлено.

Все остальные требуемые свойства проверяются без особого труда.

## § 18. Сильная перестройка $l_r$-разбиения в $l_{r+1}$-разбиение, $r + l \leqslant k$, $l < k$

Полученные здесь и в следующем параграфе результаты будут использоваться во второй части работы при доказательстве теоремы о незаузленности. Фиксируем покрытия $\theta, \eta \in \operatorname{cov} \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$, $\theta \prec \eta$, такие, что

($\alpha$) $\mathscr{N}^2_{\widehat{\mathscr{Q}}} \prec \theta$ и пара покрытий $\theta \prec \eta$ удовлетворяет 3-кратному $\mathrm{ANE}_{\mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle}$-тесту.

Пусть $\widehat{\mathscr{Q}} = \{\widehat{q}_\alpha\}$, $T'\colon \mathscr{Q}' \to \widehat{\mathscr{Q}}$ есть трансформация удобного $l_r$-разбиения $\mathscr{Q}' = \{q'_\alpha\}$ пространства $X$, переводящая $q'_\alpha$ в $\widehat{q}_\alpha$, а $\beta'\colon X \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle)$ есть аккомпанемент $T'$, являющийся $k$-эквивалентностью относительно $\theta$. Набор из $r+1$ элемента $\widehat{q}_{\alpha_s} \in \widehat{\mathscr{Q}}$ с $\widehat{q}_{\alpha_1} \cap \dots \cap \widehat{q}_{\alpha_{r+1}} \neq \varnothing$ назовем *плохим*, если пересечение $\bigcap \{q'_{\alpha_s} \mid 1 \leqslant s \leqslant r+1\} (\in \mathrm{AE}(l-1))$ соответствующих элементов не является $\mathrm{AE}(l)$. Ясно, что имеется не более счетного числа плохих наборов. Через $\mathfrak{C} \subset \widehat{X}$ обозначим объединение тел всех плохих наборов.

Теорема 18.1 (о сильной перестройке $l_r$-разбиения в $l_{r+1}$-разбиение). *Для любого ручного $Z$-множества $X_0 \subset X$ существует тройка $\bigl(\mathscr{Q},\ T\colon \mathscr{Q} \to \widehat{\mathscr{Q}},\ \beta\colon X \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle\bigr)$, в которой $\mathscr{Q}$ есть $l_{r+1}$-разбиение $X$, $T$ есть трансформация разбиений, а $\beta$ есть аккомпанемент $T$, такая, что*

(1) *трансформации $T$ и $T'$ являются $X_0$-эквивалентными, а также $\beta = \beta'$ на $X_0$;*
(2) *$\beta$ является $k$-эквивалентностью относительно $\eta^2$;*
(3) $\operatorname{dist}(\beta, \beta') \prec \mathscr{N}^2_{\widehat{\mathscr{Q}}}$;
(4) *выполняется условие неизменяемости элементов $\mathscr{Q}'$: если $q'_\alpha \in \mathscr{Q}'$ и*

$$\beta'(q'_\alpha) \cap \mathrm{N}(\mathscr{N}_{\mathfrak{C}}; \mathscr{N}_{\widehat{\mathscr{Q}}}) = \varnothing,$$

*то $q'_\alpha$ есть элемент $\mathscr{Q}$, $T(q'_\alpha) = T'(q'_\alpha)$ и $\beta\restriction_{q'_\alpha} = \beta'\restriction_{q'_\alpha}$.*

Самый простой вариант теоремы, используемый при выводе постулата Бествины, получается в случае одноэлементных покрытий $\theta$ и $\eta$.

Доказательство. В силу предложения 12.9 существует такое дискретное семейство $\{N_i \mid i \geqslant 1\}$ совершенных относительно $\mathscr{Q}'$ подмножеств, удовлетворяющее предложению 11.7, (6), что $X_0 \subset \operatorname{Int} N_1$. Из совершенности $N_i$ следует, что $\mathscr{Q}'_i \rightleftharpoons \{(q')^i_\alpha = q'_\alpha \cap N_i\}$ является $l_r$-разбиением $N_i$.

Отождествим $\{i \geqslant 2\} \subset \mathbb{N}$ со всевозможными плохими наборами: $\mathscr{P}_2, \mathscr{P}_3, \mathscr{P}_4, \dots$ . Легко видеть, что разбиение $\mathscr{Q}'_i$, трансформация

$$T'_i\colon \mathscr{Q}'_i \to \widehat{\mathscr{Q}}, \qquad T'_i((q')^i_\alpha) = T'(q'_\alpha),$$

аккомпанемент $\beta'_i = \beta'\restriction_{N_i}$, ручное $Z$-множество $X_i \rightleftharpoons \operatorname{Bd} N_i \subset N_i$ и плохой набор $\mathscr{P}_i = \{\widehat{q}_{\alpha_s}\}$ удовлетворяют условию теоремы 16.1 о слабой перестройке $l_r$- в $l_{r+1}$-разбиение. Поэтому существуют $l_r$-разбиение $\mathscr{Q}_i = \{q^i_\alpha\}$ множества $N_i$, трансформация $T_i\colon \mathscr{Q}_i \to \widehat{\mathscr{Q}}$, $T_i(q^i_\alpha) = \widehat{q}_\alpha$, и аккомпанемент $\beta_i$ трансформации $T_i$ такие, что

(5) $q^i_{\alpha_1} \cap \dots \cap q^i_{\alpha_{r+1}} \in \mathrm{AE}(l)$;
(6) $T_i$ $X_i$-эквивалентна $T'_i$;
(7) если $\widehat{q}_\alpha \notin \mathscr{P}_i$, то $q^i_\alpha = (q')^i_\alpha$, $T_i(q^i_\alpha) = T'_i((q')^i_\alpha) = \widehat{q}_\alpha$ и $\beta_i = \beta'_i$ на $q^i_\alpha$;
(8) $\operatorname{dist}(\beta_i, \beta'_i) \prec \mathscr{N}^2_{\widehat{\mathscr{Q}}}$.

После этого в качестве искомого разбиения $\mathscr{Q} = \{q_\alpha\}$ возьмем соединение разбиений $\mathscr{Q}'$ и $\{\mathscr{Q}_i \mid i \geqslant 2\}$. Из предложения 15.4 легко следует, что $\mathscr{Q}$ является $l_{r+1}$-разбиением $X$.

Искомая трансформация $T$ задается формулой $T(q_\alpha) = \widehat{q}_\alpha$, а аккомпанемент $\beta$ трансформации $T$ – формулой $\beta = \beta_i$ на $N_i$ и $\beta = \beta'$ на $X \setminus \bigsqcup\{\operatorname{Int} N_i\}$. Из явных формул для $q_\alpha$ (см. предложение 15.2) и $\beta$ следует (1).

Ясно, что из (8) следует $\operatorname{dist}(\beta, \beta') \prec \mathscr{N}^2_{\widehat{\mathscr{Q}}}$ – свойство (3) установлено. Отсюда и из ($\alpha$) следует, что условия теоремы 10.6 выполнены, что влечет за собой $k$-эквивалентность $\beta$ относительно $\eta^2$. Таким образом, (2) доказано.

Установим теперь справедливость (4). Если предположить противное ($q'_\alpha \notin \mathscr{Q}$), то из явной конструкции $\mathscr{Q}$ следует, что $\widehat{q}_\alpha = T'(q'_\alpha) \in \widehat{\mathscr{Q}}$ содержится в каком-либо плохом наборе. Поэтому $\beta'(q'_\alpha) \subset \mathring{\mathrm{St}}\langle\widehat{q}_\alpha\rangle \subset \mathrm{N}(\mathscr{N}_{\mathfrak{C}}; \mathscr{N}_{\widehat{\mathscr{Q}}})$, что противоречит предположению, сделанному в (4). Следовательно, элемент

$q'_\alpha \in \mathscr{Q}'$ в процессе перестройки не изменился – $q'_\alpha \in \mathscr{Q}$. Отсюда следует, что $T(q'_\alpha) = T'(q'_\alpha)$ и $\beta\restriction_{q'_\alpha} = \beta'\restriction_{q'_\alpha}$.

## § 19. Сильная перестройка $l$-разбиения в $(l+1)_1$-разбиение, $0 \leqslant l < k$

До конца параграфа фиксируем такие покрытия $\theta, \eta \in \operatorname{cov} \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$, $\theta^{32} \prec \eta$, что

($\alpha$) $\mathscr{N}_{\widehat{\mathscr{Q}}} \prec \theta$ и пара покрытий $\theta^{32} \prec \eta$ удовлетворяет 3-кратному $\mathrm{ANE}_{\mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle}$-тесту.

Пусть $\widehat{\mathscr{Q}} = \{\widehat{q}_\alpha\}$, $T'\colon \mathscr{Q}' \to \widehat{\mathscr{Q}}$ есть трансформация удобного $l$-разбиения $\mathscr{Q}' = \{q'_\alpha\}$ пространства $X$, переводящая $q'_\alpha$ в $\widehat{q}_\alpha$, а $\beta'\colon X \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle)$ есть аккомпанемент $T'$, являющийся $k$-эквивалентностью относительно $\theta$. Через $\mathfrak{C} \subset \widehat{X}$ обозначим тело плохого семейства

$$\bigl\{\widehat{q}_\alpha \mid q'_\alpha \in \mathscr{Q}' \text{ не является } l\text{-связным}\bigr\} \subset \widehat{\mathscr{Q}}.$$

Фиксируем также совершенное $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображение $f\colon X \to Y$, для которого $\mathscr{H}_f \subset X$ есть счетное объединение ручных $Z$-множеств.

Теорема 19.1 (о сильной перестройке $l$-разбиения в $(l+1)_1$-разбиение). *Для любого ручного $Z$-множества $X_0 \subset X$ существует тройка $\bigl(\mathscr{Q},\ T\colon \mathscr{Q} \to \widehat{\mathscr{Q}},\ \beta\colon X \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle\bigr)$, в которой $\mathscr{Q}$ есть удобное $(l+1)_1$-разбиение $X$, $T$ есть трансформация, $X_0$-эквивалентная $T'$, а $\beta$ есть аккомпанемент $T$, такая, что*

(i) *$\beta$ является $k$-эквивалентностью относительно $\eta^2$ и совпадает с $\beta'$ на $X_0$;*

(ii) $\operatorname{dist}(\beta, \beta') \prec \theta^{32}$;

(iii) *выполняется условие неизменяемости элементов $\mathscr{Q}'$: если $q'_\alpha \in \mathscr{Q}'$ и*

$$\beta'(q'_\alpha) \cap \mathrm{N}(\mathscr{N}_{\mathfrak{C}}; \theta^{14}) = \varnothing,$$

*то $q'_\alpha$ является элементом $\mathscr{Q}$, $T(q'_\alpha) = T'(q'_\alpha)$ и $\beta\restriction_{q'_\alpha} = \beta'\restriction_{q'_\alpha}$;*

(iv) *если, кроме того, известно, что $\beta'(f^{-1}(y)) \prec \omega$ для всех $y \in Y$, где $\omega \in \operatorname{cov} \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$ и $\mathscr{N}^5_{\widehat{\mathscr{Q}}} \prec \omega$, то $\beta(f^{-1}(y)) \prec \omega^8$ для всех $y \in Y$.*

Эта наиболее мощная теорема о перестройке. Наипростейший ее случай ($\theta = \eta$ суть одноэлементные покрытия, а $X_0 \in \mathscr{C}_X$, $X_0 \subset_Z X$) используется при выводе постулата Бествины. При доказательстве теоремы о незаузленности $\omega$ тривиально. В общем виде теорема применяется при доказательстве сжатия совершенной резольвенты.

Доказательство теоремы сводится к последовательному применению приводимой ниже перестройки разбиений и дискретной "join crowd" перестройки.

Теорема 19.2 (о слабой перестройке $l$-разбиения в $(l+1)_1$-разбиение). *В условиях теоремы 19.1 существует тройка $\bigl(\overline{\mathscr{Q}},\ \overline{T}\colon \overline{\mathscr{Q}} \to \widehat{\mathscr{Q}},\ \bar\beta\colon X \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle\bigr)$, в которой $\overline{\mathscr{Q}}$ есть разбиение $X$, $\overline{T}$ есть соответствие разбиений, а $\bar\beta$ есть аккомпанемент $\overline{T}$, такая, что*

(1) $\overline{T}$ *является дискретным* $l$*-продолжением трансформации* $T^\bullet\colon \mathscr{Q}^\bullet \to \widehat{\mathscr{Q}}$ $(l+1)_1$*-разбиения* $\mathscr{Q}^\bullet = \{q^\bullet_\alpha\}$, *заданного на* $\nu^k$*-конструктивном множестве* $E \in \mathscr{C}^k_X$, *и* $\widehat{\mathscr{Q}}$;

(2) *семейство* $\{\mathfrak{K}_i \mid i \geqslant 1\}$ *и подполиэдр* $\mathfrak{K} \subset \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$, *контролирующие дискретную "join crowd" перестройку, таковы, что* $\{\mathfrak{K}_i \mid i \geqslant 1\} \prec \theta^{28}$ *и* $\mathfrak{K} \subset \mathrm{N}(\mathscr{N}_{\mathfrak{C}};\theta^{14})$;

(3) $X_0 \subset \operatorname{Int} E$, *а трансформации* $T^\bullet$ *и* $T'$ *являются* $X_0$*-эквивалентными*;

(4) $\operatorname{dist}(\bar\beta,\beta') \prec \theta^4$ *и* $\bar\beta$ *совпадает с* $\beta'$ *на* $X_0$;

(5) *условие неизменяемости элементов* $\mathscr{Q}'$: *если* $q'_\alpha \in \mathscr{Q}'$ *и*

$$\beta'(q'_\alpha) \cap \mathrm{N}(\mathscr{N}_{\mathfrak{C}};\theta^9) = \varnothing,$$

*то* $q'_\alpha$ *является элементом* $\overline{\mathscr{Q}}$, $\overline{T}(q'_\alpha) = T'(q'_\alpha)$ *и* $\bar\beta{\restriction}_{q'_\alpha} = \beta'{\restriction}_{q'_\alpha}$;

(6) *если* $\beta'(f^{-1}(y)) \prec \omega$ *для всех* $y \in Y$, *где* $\omega \in \operatorname{cov}\mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$ *и* $\mathscr{N}^5_{\widehat{\mathscr{Q}}} \prec \omega$, *то* $\bar\beta(f^{-1}(y)) \prec \omega^8$ *для всех* $y \in Y$.

Замечание. Главное отличие двух приведенных выше теорем заключается в том, что фигурирующее в ней $(l+1)_1$-разбиение задано не на всем пространстве $X$.

Доказательство теоремы 19.2. В силу предложения 12.10 существует такое дискретное семейство $\{N_i\}_{i\geqslant 0}$ совершенных относительно $\mathscr{Q}'$ подмножеств, удовлетворяющее предложению 11.7, (6), что $X_0 \subset \operatorname{Int} N_0$ и при всех $i \geqslant 0$

(7) $N_i$ есть деформационный $(k-1)$-ретракт относительно $(\beta')^{-1}(\theta)$;

(8) $\beta'_i \rightleftharpoons \beta'{\restriction}_{N_i}\colon N_i \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$ является $k$-эквивалентностью относительно $\vartheta \rightleftharpoons \theta^2$.

Пусть $\mu \in \operatorname{cov} X$ таково, что семейство $\{\mathrm{N}(N_i;\mu)\}$ дискретно в $X$. Поскольку $f$ совершенно, а $\mathscr{H}_f \subset X$ есть счетное объединение ручных $Z$-множеств, то следующее множество

$$D \rightleftharpoons \bigcup\bigl\{f^{-1}(y) \mid f^{-1}(y) \text{ не содержится ни в одном элементе } \mu\bigr\} \subset X$$

замкнуто и является ручным $Z$-множеством. Обозначим пересечение $q'_\alpha$ с $N_i$ через $(q')^i_\alpha \in \mathscr{C}^k_X$. Из (7), (8) следует, что для всех $i \geqslant 1$

(9) $\mathscr{Q}'_i \rightleftharpoons \mathscr{Q}'{\restriction}_{N_i} = \{(q')^i_\alpha\}$ является $l$-разбиением $N_i$, $\beta'_i$ есть аккомпанемент трансформации $T'_i\colon Q'_i \to \widehat{\mathscr{Q}}$, $T'_i((q')^i_\alpha) = \widehat{q}_\alpha$.

Для определенности будем отождествлять индексное подмножество $A$ с натуральным рядом $\mathbb{N}$. Представим натуральный ряд $\mathbb{N}$ в виде дизъюнктного объединения

$$\bigsqcup\{\Gamma_\alpha \mid \alpha \geqslant 1\}$$

счетных подмножеств. В силу $(\mathscr{C})_3$ для всех $q'_\alpha \in \mathscr{Q}'$ группа $\pi_l(q'_\alpha)$ имеет не более счетного числа образующих $\{\zeta_i \in \pi_l(q'_\alpha)\}_{i\in\Gamma_\alpha}$, которые отождествим с $\Gamma_\alpha$. Если элемент $q'_\alpha$ является $l$-связным, то считаем $\Gamma_\alpha = \varnothing$ и все последующие процедуры заклеивания образующих для него не проводим.

Так как вложение $(q')^i_\alpha \hookrightarrow q'_\alpha$ является $(k-1)$-эквивалентостью для всех $i \in \mathbb{N}$, то

(10) для любых $i \in \Gamma_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{N}$, существует $a_i \in \pi_l((q')^i_\alpha)$, свободно гомотопный $\zeta_i$ в $q'_\alpha$.

Рассмотрим элемент $q'_{\alpha_0} \in \mathscr{Q}'$, $q'_{\alpha_0} \notin \mathrm{C}^l$. Для каждого $i \in \Gamma_{\alpha_0} \subset \mathbb{N}$ рассмотрим тройку $(\mathscr{Q}'_i, T'_i, \beta'_i)$, ручное $Z$-множество $X_i \rightleftharpoons \operatorname{Bd} N_i \cup (D \cap N_i) \subset N_i$, а также $a_i \in \pi_l((q')^i_\alpha)$, к которым применима глобальная аксиома. В результате получим допустимое относительно $\mathscr{Q}'_i$ множество $C_i \in \mathscr{C}^k_{N_i}$, $X_i \subset \operatorname{Int} C_i \subset N_i$, и тройку $\bigl(\mathscr{Q}_i,\ T_i\colon \mathscr{Q}_i \to \widehat{\mathscr{Q}},\ \beta_i\colon N_i \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle\bigr)$, в которой $\mathscr{Q}_i$ есть разбиение $N_i$, $T_i$ есть соответствие разбиений, а $\beta_i$ есть аккомпанемент $T$, такую, что выполнены следующие условия:

(a)$_i$ существуют $l$-разбиение $\mathscr{Q}^\bullet_i = \{(q^\bullet)^i_\alpha \mid \alpha \in A\} \subset \mathscr{Q}_i$ конструктивного множества $E_i \in \mathscr{C}^k_{N_i}$, $E_i \supset C_i$, и трансформация $T^\bullet_i\colon \mathscr{Q}^\bullet_i \to \widehat{\mathscr{Q}}$, $T^\bullet_i((q^\bullet)^i_\alpha) = \widehat{q}_\alpha$, $C_i$-эквивалентная $T'_i$, которая допускает конечное $l$-продолжение в соответствие $T_i$;

(b)$_i$ $\beta_i = \beta'_i$ на $C_i$ и $\operatorname{dist}(\beta_i, \beta'_i) \prec \vartheta^2 = \theta^4$;

(c)$_i$ $\beta_i(N_i \setminus \operatorname{Int} C_i) \subset \mathrm{N}(\langle\widehat{q}_{\alpha_0}\rangle; \vartheta^4) = \mathrm{N}(\langle\widehat{q}_{\alpha_0}\rangle; \theta^8)$;

(d)$_i$ $(q')^i_{\alpha_0} \cap C_i \subset (q^\bullet)^i_{\alpha_0}$, а соответствующее вложение является $l$-эквивалентностью;

(e)$_i$ существует элемент $b_i \in \pi_l((q')^i_{\alpha_0} \cap C_i)$, который свободно гомотопен элементу $a_i$ в $(q')^i_{\alpha_0}$, а при вложении $(q')^i_{\alpha_0} \cap C_i \hookrightarrow (q^\bullet)^i_{\alpha_0}$ переходит в нулевой элемент;

(f)$_i$ $\beta_i(f^{-1}(y) \cap N_i) \prec \omega^2$ для всех $y \in Y$.

Полагаем

$$C \rightleftharpoons Z \cup \Bigl(\bigsqcup\{C_i \mid i \geqslant 1\}\Bigr) \in \mathscr{C}^k_X, \qquad E \rightleftharpoons Z \cup \Bigl(\bigsqcup\{E_i \mid i \geqslant 1\}\Bigr) \in \mathscr{C}^k_X,$$

где $Z = X \setminus \bigsqcup\{\operatorname{Int} N_i \mid i \geqslant 1\} \in \mathscr{C}^k_X$. Очевидно, что $\operatorname{Int} C \subset E$. Искомое разбиение $\mathscr{Q}^\bullet$, заданное на $E$, определяется как соединение разбиений $\mathscr{Q}'$ и $\{\mathscr{Q}^\bullet_i\}$ (см. предложение 15.2):

$$\mathscr{Q}^\bullet \rightleftharpoons \Bigl\{(q^\bullet)_\alpha \rightleftharpoons (q'_\alpha \cap Z) \cup \Bigl(\bigsqcup\{(q^\bullet)^i_\alpha \mid i \geqslant 1\}\Bigr) \mid \alpha \in A\Bigr\}.$$

В силу предложения 15.3 $\mathscr{Q}^\bullet$ является $l$-разбиением $E$. Трансформация $T^\bullet\colon \mathscr{Q}^\bullet \to \widehat{\mathscr{Q}}$, определяемая формулой $T^\bullet(q^\bullet_\alpha) = \widehat{q}_\alpha$, есть $X_0$-эквивалентная трансформация $T'$. Так как $X_0 \subset \operatorname{Int} N_0$, а $N_0 \subset \operatorname{Int} C \subset E$, то отсюда следует свойство (3).

Искомое разбиение $\overline{\mathscr{Q}}$, заданное на $X$, определяется как

$$\overline{\mathscr{Q}} = \mathscr{Q}^\bullet \sqcup \Bigl(\bigsqcup\{\mathscr{Q}_i \setminus \mathscr{Q}^\bullet_i \mid i \geqslant 1\}\Bigr).$$

Соответствие $\overline{T}\colon \overline{\mathscr{Q}} \to \widehat{\mathscr{Q}}$ определяется требованием, чтобы

$$\overline{T}\restriction_{\mathscr{Q}^\bullet} = T^\bullet, \qquad \overline{T}\restriction_{\mathscr{Q}_i \setminus \mathscr{Q}^\bullet_i} = T_i\restriction_{\mathscr{Q}_i \setminus \mathscr{Q}^\bullet_i}.$$

Аккомпанемент $\bar\beta\colon X \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$ соответствия $\overline{T}$ определяется как $\bar\beta\restriction_{N_i} = \beta_i$ для всех $i \geqslant 1$ и $\bar\beta = \beta'$ в остальных точках. Так как $X_0 \subset N_0$, то $\bar\beta = \beta'$ на $X_0$. Из (b)$_i$ следует $\operatorname{dist}(\bar\beta, \beta') \prec \theta^4$, что доказывает (4).

В силу (a)$_i$ и дискретности семейства $\{N_i\}$ соответствие $\overline{T}$ является дискретным $l$-продолжением $T^\bullet$ (см. определение 17.4). Через $\{\mathfrak{K}_i \mid i \in \Gamma_{\alpha_0},\ q'_{\alpha_0} \notin \mathrm{C}^l\}$ и

$\mathfrak{K} \subset \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$ обозначим семейство и подполиэдр, контролирующие эту дискретную "join crowd" перестройку. В силу (b)$_i$ и свойства ($\varepsilon$), приведенного перед теоремой 17.5, имеем

$$\mathfrak{K}_i \subset \mathrm{N}\big(\beta_i'(N_i \setminus \operatorname{Int} E_i); \mathscr{N}_{\widehat{\mathscr{Q}}}^2\big) \subset \mathrm{N}\big(\beta_i(N_i \setminus \operatorname{Int} C_i); \mathscr{N}_{\widehat{\mathscr{Q}}}^2 \circ \theta^4\big).$$

Отсюда и из (c)$_i$ следует, что $\mathfrak{K}_i \subset \mathrm{N}(\langle\widehat{q}_{\alpha_0}\rangle; \theta^{14})$, а стало быть,

$$\{\mathfrak{K}_i \mid i \in \Gamma_{\alpha_0},\ q_{\alpha_0}' \notin \mathrm{C}^l\} \prec \theta^{28}, \qquad \mathfrak{K} = \bigcup \mathfrak{K}_i \subset \mathrm{N}(\mathscr{N}_{\mathfrak{C}}; \theta^{14}).$$

Свойство (2) установлено.

Так как на множестве $D$ отображения $\beta'$ и $\bar\beta$ совпадают, то для проверки (6) достаточно рассмотреть слои $f^{-1}(y)$, лежащие в одном из элементов $\mu$. В силу определения покрытия $\mu$ они пересекают не более одного $\{N_i\}$, скажем $N_i$. Так как $k > l \geqslant 0$, а $f \in \mathrm{UV}^{k-1}$, то $f^{-1}(y)$ связно. Если $\xi \in f^{-1}(y) \cap \operatorname{Bd} N_i$, то

$$\bar\beta(\xi) \in \bar\beta(f^{-1}(y)) \subset \beta'\big(f^{-1}(y) \cap Z\big) \cup \bar\beta\big(f^{-1}(y) \cap N_i\big).$$

Отсюда и из (f)$_i$ следует $\bar\beta(f^{-1}(y)) \subset \mathrm{N}(\xi; \omega^2) \prec \omega^4$. Если же $f^{-1}(y) \cap \operatorname{Bd} N_i = \varnothing$, то либо $f^{-1}(y) \subset Z$, либо $f^{-1}(y) \subset N_i$. В первом случае $\bar\beta(f^{-1}(y)) = \beta'(f^{-1}(y))$, во втором случае в силу (f)$_i$ имеем $\bar\beta(f^{-1}(y)) \prec \omega^2$. Свойство (6) установлено.

Для доказательства того, что $\mathscr{Q}^\bullet$ является $(l+1)_1$-разбиением $E$, воспользуемся предложением 15.5. В силу допустимости $C_i$ относительно $\mathscr{Q}_i'$ естественное вложение $\Psi_\alpha^i\colon C_i \cap (q')_i^\alpha \hookrightarrow (q')_i^\alpha$ является деформационной $(k-1)$- и $k$-ретракцией для всех $i \geqslant 1$. Отсюда легко видеть, что и естественное вложение $\Psi\colon C \cap q_\alpha' \hookrightarrow q_\alpha'$ будет такой же ретракцией, что в силу предложения 2.14 влечет индуцирование $\Psi$ изоморфизма $\pi_i$, $i < k$. Аналогичная проверка с помощью (d)$_i$ показывает, что $\Psi\colon C \cap q_\alpha^\bullet \hookrightarrow q_\alpha^\bullet$ есть $l$-эквивалентность. Принимая во внимание также (e)$_i$, видим, что все условия предложения 15.5 выполнены, а следовательно, верно его заключение: $q_\alpha^\bullet \in \mathrm{AE}(l+1)$.

Для проверки (5) предположим противное: $q_\alpha' \notin \overline{\mathscr{Q}}$, т.е. $q_\alpha'$ каким-либо образом изменялся, а следовательно, $q_\alpha'$ пересекается с некоторым $N_i \setminus C_i$. Тогда

$$\beta'(q_\alpha') \subset \mathrm{N}\big(\beta_i(N_i \setminus C_i); \mathscr{N}_{\widehat{\mathscr{Q}}}\big) \subset \mathrm{N}\big(\mathscr{N}_{\mathfrak{C}}; \theta^8 \circ \mathscr{N}_{\widehat{\mathscr{Q}}}\big)$$

– противоречие со сделанным в (5) предположением. Следовательно, элемент $q_\alpha' \in \mathscr{Q}'$ в процессе перестройки не изменился – $q_\alpha' \in \overline{\mathscr{Q}}$. Отсюда следует, что $\overline{T}(q_\alpha') = T'(q_\alpha')$ и $\bar\beta\restriction_{q_\alpha'} = \beta'\restriction_{q_\alpha'}$.

Вернемся к теореме 19.1. Применим теорему 17.5 о дискретной "join crowd" перестройке. В результате найдется тройка $\big(\mathscr{Q},\ T\colon \mathscr{Q} \to \widehat{\mathscr{Q}},\ \beta\colon X \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle\big)$, в которой $\mathscr{Q}$ есть $(l+1)_1$-разбиение $X$, $T$ есть трансформация разбиений, а $\beta$ есть аккомпанемент $T$, такая, что

(a) $\beta = \bar\beta$ на $X_0$;
(b) $\operatorname{dist}(\bar\beta, \beta) \prec \{\mathfrak{K}_i\} \prec \theta^{28}$;
(c) трансформации $T$ и $T^\bullet$ являются $X_0$-эквивалентными;
(d) если $\bar q_\alpha \in \overline{\mathscr{Q}}$ и $\bar\beta(\bar q_\alpha) \cap \mathfrak{K} = \varnothing$, то $\bar q_\alpha \in \mathscr{Q}$, $T(\bar q_\alpha) = \overline{T}(\bar q_\alpha)$ и $\beta\restriction_{\bar q_\alpha} = \bar\beta\restriction_{\bar q_\alpha}$;
(e) $\beta(f^{-1}(y)) \prec \omega^8$ для всех $y \in Y$.

С учетом $\mathfrak{K} \subset \mathrm{N}(\mathscr{N}_{\mathfrak{C}}; \theta^{14})$ свойство (d) влечет

(d′) если $\bar{q}_\alpha \in \bar{\mathscr{Q}}$ и $\bar{\beta}(\bar{q}_\alpha) \cap \mathrm{N}(\mathscr{N}_{\mathfrak{C}}; \theta^{14}) = \varnothing$, то $\bar{q}_\alpha \in \mathscr{Q}$, $T(\bar{q}_\alpha) = \overline{T}(\bar{q}_\alpha)$ и $\beta\restriction_{\bar{q}_\alpha} = \bar{\beta}\restriction_{\bar{q}_\alpha}$.

Условие (iii) сохранения элементов $\mathscr{Q}'$ при перестройке легко следует из (5) и (d′). Из (4) и (a)–(b) следует, что $\beta$ совпадает с $\beta'$ на $X_0$ и $\mathrm{dist}(\beta, \beta') \prec \theta^{28+4}$. Отсюда, из ($\alpha$) и из теоремы 10.6 следует, что $\beta$ является $k$-эквивалентностью относительно $\eta^2$. Проверка всего остального предоставляется читателю.

## Список литературы

[1] K. Menger, *Dimensionstheorie*, Teubner, Leipzig, 1928.

[2] G. Nöbeling, “Über eine $n$-dimensionale Universalmenge im $\mathbb{R}^{2n+1}$”, *Math. Ann.*, **104** (1931), 71–80.

[3] R. Geoghegan, R. Summerhill, “Pseudo-boundaries and pseudo-interiors in Euclidean spaces and topological manifolds”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **194** (1974), 141–165.

[4] J. J. Dijkstra, J. van Mill, J. Mogilski, “Classification of finite-dimensional pseudo-boundaries and pseudo-interiors”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **332**:2 (1992), 693–709.

[5] A. Chigogidze, K. Kawamura, E. D. Tymchatyn, “Nöbeling spaces and the pseudo-interiors of Menger compacta”, *Topology Appl.*, **68** (1996), 33–65.

[6] C. Bessaga, A. Pełczyński, *Selected topics in infinite-dimensional topology*, PWN, Warszawa, 1975.

[7] L. E. J. Brouwer, “On the structure of perfect sets of points”, *Proc. Akad. Wet. Amsterdam*, **12** (1910), 785–794.

[8] R. D. Anderson, “A characterization of the universal curve and a proof of its homogeneity”, *Ann. of Math.* (2), **67**:2 (1958), 313–324.

[9] H. Toruńczyk, “On CE-images of the Hilbert cube and characterization of $Q$-manifolds”, *Fund. Math.*, **106**:1 (1980), 31–40.

[10] M. Bestvina, *Characterizing $k$-dimensional universal Menger compacta*, Mem. Amer. Math. Soc., **71**, № 380, 1988.

[11] P. S. Alexandroff, P. S. Urysohn, “Über nulldimensionale Punktmengen”, *Math. Ann.*, **98**:1 (1928), 89–106.

[12] H. Toruńczyk, “Characterizing Hilbert space topology”, *Fund. Math.*, **111**:3 (1981), 247–262.

[13] K. Kawamura, M. Levin, E. D. Tymchatyn, “A characterization of 1-dimensional Nöbeling spaces”, *Topology Proc.*, **22** (1997), 155–174.

[14] R.H. Bing, “Partitioning continuous curves”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **58** (1952), 536–556.

[15] J. C. Mayer, L. G. Oversteegen, E. D. Tymchatyn, “The Menger curve. Characterization and extension of homeomorphisms of non-locally-separating closed subsets”, *Dissertationes Math.* (*Rozprawy Mat.*), **252** (1986), 45 pp.

[16] S.M. Ageev, *Axiomatic method of partitions in the theory of Menger and Nöbeling spaces*, Preprint, 2000; `http://at.yorku.ca/v/a/a/a/87.htm`.

[17] A. S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Grad. Texts in Math., **156**, Springer-Verlag, New York, 1995.

[18] К. Борсук, *Теория ретрактов*, Мир, М., 1971; пер. с англ.: K. Borsuk, *Theory of retracts*, PWN, Warszawa, 1967.

[19] S. T. Hu, *Theory of retracts*, Wayne State Univ. Press, Detroit, 1965.

[20] J. Dugundji, E. Michael, “On local and uniformly local topological properties”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **7**:2 (1956), 304–307.

[21] Э. Спеньер, *Алгебраическая топология*, Мир, М., 1971; пер. с англ.: E. H. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw-Hill, New York–Toronto, ON–London, 1966.

[22] С. М. Агеев, С. А. Богатый, "О склейках некоторых классов метрических пространств", *Вестн. Моск. ун-та. Сер.* 1. *Матем., мех.*, 1994, № 6, 19–23; англ. пер.: S. M. Ageev, S. A. Bogatyĭ, "On adjunction spaces of certain types of spaces", *Moscow Univ. Math. Bull.*, **49**:6 (1994), 18–21.

[23] P. Alexandroff, "Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension", *Ann. of Math.* (2), **30**:1/4 (1928–1929), 101–187.

[24] A. Kurosh, "Kombinatorischer Aufbau der bikompacten topologischen Räumen", *Compos. Math.*, **2** (1935), 471–476.

[25] П. С. Александров, Б. А. Пасынков, *Введение в теорию размерности*, Наука, М., 1973.

[26] Р. Экгелькинг, *Общая топология*, Наука, М., 1986; пер. с англ.: R. Engelking, *General topology*, PWN, Warsaw, 1977.

[27] M. Bestvina, J. Mogilskii, "Characterizing certain incomplete infinite-dimensional absolute retracts", *Michigan Math. J.*, **33**:3 (1986), 291–313.

[28] J. Dugundji, "A duality property of nerves", *Fund. Math.*, **59** (1966), 213–219.

[29] К. Рурк, Б. Сандерсон, *Введение в кусочно линейную топологию*, Мир, М., 1974; пер. с англ.: C. P. Rourke, B. J. Sanderson, *Introduction to piecewise-linear topology*, Springer-Verlag, New York, 1972.

**С. М. Агеев (S. M. Ageev)**
Белорусский государственный университет,
г. Минск, Беларусь
*E-mail*: ageev_sergei@yahoo.com, ageev@bsu.by

Поступила в редакцию
09.12.2005 и 29.11.2006