Замечание 5. Предложение и равенство $\mathrm{cd}_p(G)=1$ (или 2 для произвольных G-модулей) показывают резкое отличие когомологического поведения группы G относительно простых чисел p и $l \neq p$. Было бы интересно перенести двойственность для l-примарных модулей на случай p-примарных модулей, используя, например, плоские когомологии поля K.

Литература

1. Бурбаки Н. Общая топология. М., 1958. 324 с.
2. Ломадзе В. Г. О вычетах в алгебраической геометрии // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1981. Т. 45, № 6. С. 1258—1287.
3. Паршин А. Н. Локальная теория полей классов // Труды Мат. ин-та АН СССР. 1984. Т. 165. С. 143—170.
4. Серр Ж.-П. Когомологии Галуа. М., 1968. 208 с.
5. Kaplan S. Extensions of the Pontrjagin duality. II. Direct and inverse sequences // Duke Math. J. 1950. Vol. 17. P. 419—435.
6. Kato K. A generalization of local class field theory by using K-groups. 1 // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. 1979. Vol. 26. P. 303—376.
7. Kato K. Vanishing cycles, ramification of valuations and class field theory. Tokyo, 1985. 57 p. (Preprint / Univ. Tokyo).
8. Serre J.-P. Corps locaux. Paris: Hermann, 1962. 243 p.
9. Witt E. Zyklische körper und algebren der charakteristik p vom grad p^m // J. reine u. angew. Math. 1936. Bd 176. S. 126—140.
10. Witt E. Schiefkorper über diskret bewerteten korpern // J. reine angew. Math. 1936. Bd 176. S. 153—156.

В. П. ПЛАТОНОВ, В. В. БЕНЯШ-КРИВЕЦ

КОЛЬЦА ХАРАКТЕРОВ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КОНЕЧНО - ПОРОЖДЕННЫХ ГРУПП

§ 1. Введение и формулировка основных результатов

Пусть $\Gamma=\langle g_1, g_2, \ldots, g_m\rangle$ — произвольная группа с m образующими. Для поля K и линейной алгебраической K-группы G совокупность всех представлений $\mathrm{Hom}(\Gamma, G(K))$ естественным образом отождествляется с K-точками некоторого алгебраического многообразия. Для каждого $g \in \Gamma$ определим функцию τ_g на $\mathrm{Hom}(\Gamma, G(K))$ со значениями в K

$$\tau_g(\rho)=\mathrm{tr}(\rho(g)), \quad \rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, G(K)),$$

где через $\mathrm{tr}\,X$ обозначается след матрицы X.

Рассмотрим кольцо $T(\Gamma, G(K))$, порожденное функциями τ_g (более точно было бы писать τ_g^G вместо τ_g, но из контекста каждый раз будет ясно, о представлениях в какую группу идет речь). Оно называется кольцом характеров представлений группы Γ в $G(K)$. Впервые это кольцо для случая $G(K)=\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ изучали Г. Фогт [9] и Р. Фрике [4] почти сто лет назад. В настоящее время кольцо $T(\Gamma, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ принято называть кольцом характеров Фрике для группы Γ. Обзор результатов о кольце $T(\Gamma, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ и его применениях к различным задачам теории групп и линейным дифференциальным уравнениям содержится в статье В. Магнуса [6]. Интересные применения в трехмерной топологии даны в недавней большой работе [3].

Мы рассматриваем здесь более общую, но также классическую ситуацию: кольца характеров $T(\Gamma, \mathrm{GL}_n(K))$ и $T(\Gamma, \mathrm{SL}_n(K))$ для произвольных и специальных n-мерных представлений. Одним из центральных здесь является вопрос о конечной порожденности колец $T(\Gamma, \mathrm{GL}_n(K))$ и $T(\Gamma, \mathrm{SL}_n(K))$. В 1972 г.

Р. Горовиц [5] показал, что кольцо характеров Фрике $T(\Gamma, SL_2(\mathbb{C}))$ конечно порождено. Вопрос о конечной порожденности колец $T(\Gamma, GL_n(K))$ и $T(\Gamma, SL_n(K))$ обсуждался Х. Бассом и А. Любоцки [2].

Решение задачи о конечной порожденности колец $T(\Gamma, GL_n(K))$ и $T(\Gamma, SL_n(K))$ содержится в двух следующих теоремах настоящей работы.

Теорема 1. *Пусть группа Γ обладает бесконечной циклической фактор-группой. Тогда для поля K нулевой характеристики справедливы следующие утверждения:*

1) *для всех $n \geqslant 2$ кольцо $T(\Gamma, GL_n(K))$ не является конечно-порожденным;*

2) *для $n \geqslant 4$ кольцо $T(\Gamma, SL_n(K))$ не является конечно-порожденным;*

3) *при $n=3$ кольцо $T(\Gamma, SL_3(K))$ конечно порождено для любой группы Γ.*

Во второй теореме рассматривается случай поля K положительной характеристики. При этом отметим сразу, что для конечного поля K кольцо $T(\Gamma, G(K))$ конечно порождено для любой группы Γ. Это легко следует из того факта, что группа Γ обладает лишь конечным числом подгрупп фиксированного индекса. Через $T_K(\Gamma, GL_n(K))$ и $T_K(\Gamma, SL_n(K))$ будем обозначать K-алгебру характеров для соответствующих представлений.

Теорема 2. *Пусть K — бесконечное поле характеристики $p > 0$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *для любой группы Γ кольцо $T(\Gamma, GL_n(K))$ конечно порождено при $n < p$, а кольцо $T(\Gamma, SL_n(K))$ конечно порождено при $n < 2p$;*

2) *если группа Γ обладает бесконечной циклической фактор-группой, то K-алгебры $T_K(\Gamma, GL_n(K))$ и $T_K(\Gamma, SL_n(K))$ не являются конечно-порожденными соответственно при $n \geqslant p$ и $n \geqslant 2p$.*

Обратим внимание на утверждение 2) теоремы 2, которое показывает, что результаты К. Прочези [8] об инвариантах конечного набора $n \times n$ матриц не распространяются на случай полей произвольной положительной характеристики.

Краткое изложение основных результатов настоящей работы опубликовано в [1].

§ 2. Кольца характеров представлений над полями нулевой характеристики

Отметим вначале, что для любой подгруппы $H \subset GL_n(K)$ кольцо $T(\Gamma, H)$ является гомоморфным образом кольца $T(\Gamma, GL_n(K))$, в частности, из бесконечной порожденности кольца $T(\Gamma, SL_n(K))$ следует бесконечная порожденность кольца $T(\Gamma, GL_n(K))$. Аналогично если $\varphi: \Gamma_1 \to \Gamma_2$ — эпиморфизм, то он индуцирует эпиморфизм $\varphi^*: T(\Gamma_1, G(K)) \to T(\Gamma_2, G(K))$, где $\varphi^*(\tau_g) = \tau_{\varphi(g)}$, $g \in \Gamma_1$. В частности, из бесконечной порожденности $T(\Gamma_2, G(K))$ следует бесконечная порожденность $T(\Gamma_1, G(K))$. Очевидно, что среди групп с m образующими самое большое кольцо характеров будет у свободной группы.

Для доказательства сформулированных выше теорем нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть поле K бесконечно, $\Gamma = \langle g \rangle$ — бесконечная циклическая группа и $K_1 \supset K$. Тогда кольцо $T(\Gamma, SL_n(K))$ (соответственно $T(\Gamma, GL_n(K))$) конечно порождено тогда и только тогда, когда конечно порождено кольцо $T(\Gamma, SL_n(K_1))$ (соответственно $T(\Gamma, GL_n(K_1))$).*

Доказательство. Пусть, например, τ_{g^i}, $-l \leqslant i \leqslant l$, — конечная система образующих кольца $T(\Gamma, SL_n(K))$. Тогда для любого заданного $m \in \mathbb{Z}$ мы имеем равенство

$$\tau_{g^m} = P(\tau_{g^{-l}}, \ldots, \tau_{g^l}), \tag{1}$$

где $P \in \mathbb{Z}[y_{-l}, \ldots, y_l]$. Поскольку Γ — циклическая группа, то (1) эквивалентно равенству

$$\operatorname{tr} X^m = P(\operatorname{tr} X^{-l}, \ldots, \operatorname{tr} X^l), \tag{2}$$

где $X = (x_{ij})$ — произвольная матрица из $SL_n(K)$. Равенство (2) в свою очередь эквивалентно условию $Q(x_{ij}) = 0$, где Q — некоторая регулярная функция на $SL_n(K)$. Из бесконечности поля K вытекает, что

$$Q(x_{ij}) = (\det X - 1)\, Q_1(x_{ij}),$$

откуда видно, что Q обращается в нуль на $SL_n(K_1)$. Следовательно, равенство (2) выполняется для любой матрицы X из $SL_n(K_1)$, а это означает, что функции τ^{g^i}, $-l \leqslant i \leqslant l$, порождают кольцо $T(\Gamma, SL_n(K_1))$. Обратное утверждение леммы следует из сделанных нами выше замечаний.

Лемма 2. *Если кольцо* $T(\Gamma, GL_n(K))$ (*соответственно* $T(\Gamma, SL_n(K))$) *не является конечно-порожденным для некоторого* n, *то для любого* $m > n$ *кольцо* $T(\Gamma, GL_m(K))$ (*соответственно* $T(\Gamma, SL_m(K))$) *бесконечно порождено.*

Доказательство. Допустим, что кольцо $T(\Gamma, GL_n(K))$ не является конечно-порожденным, а для некоторого $m > n$ кольцо $T(\Gamma, GL_m(K))$ порождается функциями τ_{γ_i}, $1 \leqslant i \leqslant s$, $\gamma_i \in \Gamma$. Рассмотрим стандартное вложение $GL_n(K)$ в $GL_m(K)$

$$\varepsilon : X \mapsto \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & E_{m-n} \end{pmatrix}.$$

Кольцо $T(\Gamma, \varepsilon(GL_n(K)))$ является эпиморфным образом кольца $T(\Gamma, GL_m(K))$ и, следовательно, порождается функциями τ'_{γ_i}, $1 \leqslant i \leqslant s$ (одним штрихом будем помечать функции из $T(\Gamma, \varepsilon(GL_n(K)))$, двумя штрихами — функции из $T(\Gamma, GL_n(K))$). Таким образом, для любого $g \in \Gamma$ мы должны иметь равенство

$$\tau'_g = P(\tau'_{\gamma_1}, \ldots, \tau'_{\gamma_s}), \tag{3}$$

где $P \in \mathbb{Z}[y_1, \ldots, y_s]$. Поскольку $\tau'_\gamma = \tau''_\gamma + m - n$ для любого $\gamma \in \Gamma$, равенство (3) можно записать в виде

$$\tau''_\gamma = P_1(\tau''_{\gamma_1}, \ldots, \tau''_{\gamma_s}) + l, \quad l \in \mathbb{Z}, \tag{4}$$

где $P_1 \in \mathbb{Z}[y_1, \ldots, y_s]$ — полином без свободного члена. Покажем, что l делится на n. Взяв единичное представление, имеем из (4)

$$n = P_1(n, \ldots, n) + l,$$

откуда видно, что $l = rn$, $r \in \mathbb{Z}$. Поскольку $\tau''_e = n$, где e — единица группы Γ, то $l = r \cdot \tau''_e$. Из равенства (4) теперь следует, что функции $\tau''_e, \tau''_{\gamma_1}, \ldots, \tau''_{\gamma_s}$ порождают кольцо $T(\Gamma, GL_n(K))$, что противоречит сделанному нами предположению о том, что $T(\Gamma, GL_n(K))$ не является конечно-порожденным. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* Γ — *бесконечная циклическая группа. Тогда для поля* K *нулевой характеристики кольцо* $T(\Gamma, GL_n(K))$ *не является конечно-порожденным для всех* $n \geqslant 2$.

Доказательство. Предположим противное: некоторый конечный набор функций τ_{g^i}, $-l \leqslant i \leqslant l$, порождает кольцо $T(\Gamma, GL_n(K))$. Тогда для любого $m > l$ мы должны иметь равенство

$$\tau_{g^m} = \sum_{(i_1, \ldots, i_s)} a_{i_1 \ldots i_s} \tau_{g^{i_1}} \cdot \ldots \cdot \tau_{g^{i_s}}, \tag{5}$$

где $-l \leqslant i_j \leqslant l$, $j = 1, \ldots, s$, $a_{i_1 \ldots i_s} \in \mathbb{Z}$. Так как группа Γ — бесконечная циклическая, то (5) эквивалентно равенству

$$\operatorname{tr} X^m = \sum_{(i_1, \ldots, i_s)} a_{i_1 \ldots i_s} \operatorname{tr} X^{i_1} \ldots \operatorname{tr} X^{i_s}, \tag{6}$$

где $X=(x_{ij})$ — произвольная матрица из $\mathrm{GL}_n(K)$. Лемма 1 позволяет в качестве X взять «общую» матрицу с независимыми элементами x_{ij}. После умножения обеих частей (6) на подходящую степень $\det X$ получим два полинома от x_{ij}, которые принимают одинаковые значения на $\mathrm{GL}_n(K)$ и, следовательно, равны. Так как полином в левой части является однородным, то и полином в правой части должен быть однородным, а из сравнения степеней следует, что для каждого набора $(i_1, \ldots, i_s)$ должно выполняться условие $i_1+\ldots+i_s=m$. Поскольку $m>l$, то $s\geqslant 2$. Положим $X=E_n$ в равенстве (6), тогда

$$n=\sum_{(i_1,\ldots,i_s)} a_{i_1\ldots i_s} n^s.$$

Последнее равенство невозможно, поскольку правая часть делится на n^2, а левая — нет. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть Γ — бесконечная циклическая группа, K — поле характеристики 0. Тогда для $n\geqslant 4$ кольцо $T(\Gamma, \mathrm{SL}_n(K))$ не является конечно-порожденным.*

Доказательство. В силу леммы 2 достаточно рассмотреть случай $n=4$. Предположим, что для некоторого l функции τ_{g^i}, $-l\leqslant i\leqslant l$, порождают кольцо $T(\Gamma, \mathrm{SL}_4(K(x)))$, где x — трансцендентный над K элемент. Тогда для любого $m>l$ мы должны иметь равенство

$$\tau_{g^m}=\sum_{i=-l}^{l} a_i\tau_{g^i}+\sum_{(i_1,\ldots,i_s)} a_{i_1\ldots i_s}\tau_{g^{i_1}}\ldots\tau_{g^{i_s}}, \tag{7}$$

где $-l\leqslant i_j\leqslant l$, $j=1, \ldots, s$, a_i и $a_{i_1\ldots i_s}\in\mathbb{Z}$. Рассмотрим представление

$$\rho: g\mapsto X=\mathrm{diag}(x,\ x,\ x^{-1},\ x^{-1}). \tag{8}$$

Очевидно, что $\mathrm{tr}\,X^d=2(x^d+x^{-d})$ для любого $d\in\mathbb{Z}$. Для представления (8) мы получаем из (7):

$$2(x^m+x^{-m})=\sum_{i=-l}^{l} 2a_i(x^i+x^{-i})+$$
$$+\sum_{(i_1,\ldots,i_s)} 2^s a_{i_1\ldots i_s}(x^{i_1}+x^{-i_1})\ldots(x^{i_s}+x^{-i_s}). \tag{9}$$

Так как $m>l$, то равенство (9) может быть записано в виде

$$P(x)+P\left(\frac{1}{x}\right)=0, \tag{9'}$$

где $P\in\mathbb{Z}[x]$, причем $P\not\equiv 0$, поскольку коэффициент при x^m в P отличен от нуля. Невозможность равенства (9′) достаточно очевидна. Полученное противоречие с учетом леммы 1 и завершает доказательство.

Лемма 5. *Для любых $g, h\in\Gamma$ в кольце $T(\Gamma, \mathrm{SL}_3(K))$ выполняется соотношение*

$$\tau_{g^2h}=\tau_g\tau_{gh}-\tau_{g^{-1}}\tau_h+\tau_{g^{-1}h}. \tag{10}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную матрицу $A\in\mathrm{SL}_3(K)$ и корни $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ее характеристического полинома. По теореме Гамильтона—Кэли, A удовлетворяет уравнению

$$A^3-A^2\,\mathrm{tr}\,A+A(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)-E=0.$$

Заметим, что

$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3=\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}=\mathrm{tr}\,A^{-1},$$

поскольку $\alpha_1\alpha_2\alpha_3=1$. Таким образом, мы имеем равенство

$$A^3-A^2\operatorname{tr}A+A\cdot\operatorname{tr}A^{-1}-E=0. \quad (11)$$

Умножим обе части (11) на $A^{-1}B$ справа, где $B\in SL_3(K)$, и возьмем след:

$$\operatorname{tr}A^2B=\operatorname{tr}A\operatorname{tr}AB-\operatorname{tr}A^{-1}\operatorname{tr}B+\operatorname{tr}A^{-1}B. \quad (12)$$

Равенство (12) выполняется для любых матриц A, $B\in SL_3(K)$, из чего немедленно следует справедливость равенства (10).

Равенство (10) часто удобнее использовать в виде

$$\tau_{tgh}=\tau_g\tau_{th}-\tau_{g^{-1}}\tau_{tg^{-1}h}+\tau_{tg^{-2}h}, \quad (13)$$

который получается из (10) заменой h на $g^{-1}ht$. В двух следующих леммах группа $\Gamma=\langle g_1,\ldots,g_m\rangle$ предполагается свободной. Для произвольного свободно редуцированного слова $W\in\Gamma$ положим $s_i(W)=(n_1,\ldots,n_s)$, где $n_1,\ldots,n_s$ — все показатели, с которыми образующая g_i входит в W, $d_i(W)=|n_1|+\cdots+|n_s|$. Если g_i не входит в W, то положим $s_i(W)=(0)$, $d_i(W)=(0)$.

Лемма 6. *Пусть $g=g_r$ — некоторая образующая группы Γ и $W=AB$ — такой элемент Γ, что $d_{i_1}(A)=d_{i_2}(A)=\ldots=d_{i_k}(A)=0$ для некоторых $i_1,\ldots,i_k$ (набор $(i_1,\ldots,i_k)$ может быть и пустым). Тогда $\tau_W=P(\tau_{W_1},\ldots,\tau_{W_s})$, где $P\in\mathbb{Z}[y_1,\ldots,y_s]$, $W_i=A_iB_i$, $d_{i_1}(A_i)=\ldots=d_{i_k}(A_i)=0$, $B_i\in\{B,e\}$, $d_g(A_i)\leqslant 2$, $1\leqslant i\leqslant s$.*

Доказательство леммы проведем индукцией по $d_g(A)$. Если $d_g(A)\leqslant 2$, то доказывать нечего. Пусть лемма справедлива для всех W, у которых $d_g(A)<n$. Рассмотрим $W=AB$, $d_g(A)=n$. Пусть $s_g(A)=(n_1,\ldots,n_r)$.

Предположим, что для некоторого i, скажем, для $i=1$, $|n_1|\geqslant 2$. Пусть для определенности $n_1\geqslant 2$. Тогда $W=U_1g^{n_1}U_2B$ и, применяя (13), имеем:

$$\tau_W=\tau_{U_1g(g^{n_1-1}U_2B)}=\tau_g\tau_{U_1g^{n_1-1}U_2B}-\tau_{g^{-1}}\tau_{U_1g^{n_1-2}U_2B}+\tau_{U_1g^{n_1-3}U_2B}.$$

Поскольку $d_g(U_1g^{n_1-1}U_2)<d_g(U_1g^{n_1}U_2)=d_g(A)$, $d_g(U_1g^{n_1-2}U_2)<d_g(A)$ и $d_g(U_1g^{n_1-3}U_2)<d_g(A)$, то, по индукции, получаем требуемое утверждение.

Пусть теперь $|n_i|\leqslant 1$, т. е. $n_i\in\{-1,-1\}$, $-1\leqslant i\leqslant r$, и для некоторого $i<r$ $n_i=n_{i+1}=\varepsilon$. Это означает, что $A=U_1g^\varepsilon U_2g^\varepsilon U_3$, причем $d_g(U_2)=0$. С учетом (13)

$$\tau_W=\tau_{U_1(g^\varepsilon U_1)(g^\varepsilon U_3B)}=\tau_{g^\varepsilon U_2^\varepsilon}\tau_{U_1g^\varepsilon U_3B}-\tau_{U_2^{-1}g^{-\varepsilon}}\tau_{U_1U_2^{-1}U_3B}+\tau_{U_1U_2^{-1}g^{-\varepsilon}U_2^{-1}U_3B}.$$

Положим $A_1=g^\varepsilon U_2$, $A_2=U_1g^\varepsilon U_3$, $A_3=g^{-\varepsilon}U_2^{-1}$, $A_4=U_1U_2^{-1}U_3$, $A_5=U_1U_2^{-1}g^{-\varepsilon}\times\times U_2^{-1}U_3$. Поскольку $d_g(A_i)<d_g(A)$, $1\leqslant i\leqslant 5$, то в силу индуктивного предположения для τ_W справедливо утверждение леммы.

Осталось рассмотреть последний возможный случай: $n_i\in\{-1,1\}$, $1\leqslant i\leqslant r$, $n_{i+1}=-n_i$ для всех $i=1,\ldots,r-1$. Поскольку $d_g(A)=n>2$, то $r>2$ и A можно записать в виде

$$A=U_1g^\varepsilon U_2g^{-\varepsilon}U_3g^\varepsilon U_4,\ \text{где}\ d_g(U_1)=d_g(U_2)=d_g(U_3)=0.$$

Тогда, согласно (13),

$$\tau_W=\tau_{AB}=\tau_{U_1g^\varepsilon(U_2g^{-\varepsilon}U_3g^\varepsilon U_4B)}=\tau_{g^\varepsilon}\tau_{U_1U_2g^{-\varepsilon}U_3g^\varepsilon U_4B}-$$
$$-\tau_{g^{-\varepsilon}}\tau_{U_1g^{-\varepsilon}U_2g^{-\varepsilon}U_3g^\varepsilon U_4B}+\tau_{U_1g^{-2\varepsilon}U_2g^{-\varepsilon}U_3g^\varepsilon U_4B}.$$

В свою очередь

$$\tau_{U_1 g^{-2\varepsilon} U_2 g^{-\varepsilon} U_3 g^{\varepsilon} U_4 B} = \tau_{(U_1 g^{-\varepsilon})(g^{-\varepsilon} U_2)(g^{-\varepsilon} U_3 g^{\varepsilon} U_4 B)} = \tau_{g^{-\varepsilon} U_2} \tau_{U_1 g^{-2\varepsilon} U_3 g^{\varepsilon} U_4 B} -$$
$$- \tau_{U_2^{-1} g^{\varepsilon}} \tau_{U_1 g^{-\varepsilon} U_2^{-1} U_3 g^{\varepsilon} U_4 B} + \tau_{U_1 g^{-\varepsilon} U_2^{-1} g^{\varepsilon} U_2^{-1} U_3 g^{\varepsilon} U_4 B}.$$

Таким образом, имеем равенство

$$\tau_W = \tau_{g^{\varepsilon}} \tau_{A_1 B} - \tau_{g^{-\varepsilon}} \tau_{A_2 B} + \tau_{g^{-\varepsilon} U_2} \tau_{A_3 B} - \tau_{g^{\varepsilon} U_2^{-1}} \tau_{A_4 B} + \tau_{A_5 B},$$

где $A_1 = U_1 U_2 g^{-\varepsilon} U_3 g^{\varepsilon} U_4$, $A_2 = U_1 g^{-\varepsilon} U_2 g^{-\varepsilon} U_3 g^{\varepsilon} U_4$, $A_3 = U_1 g^{-2\varepsilon} U_3 g^{\varepsilon} U_4$, $A_4 = U_1 g^{-\varepsilon} U_2^{-1} U_3 g^{\varepsilon} U_4$, $A_5 = U_1 g^{-\varepsilon} U_2^{-1} g^{\varepsilon} U_2^{-1} U_3 g^{\varepsilon} U_4$. Очевидно, что $d_g(A_1) < d_g(A)$, $d_g(A_4) < d_g(A)$. Далее, хотя $d_g(A_2) = d_g(A_3) = d_g(A_5) = d_g(A)$, но, поскольку $s_g(A_2) = (-\varepsilon, -\varepsilon, \ldots)$, $s_g(A_3) = (-2\varepsilon, \varepsilon, \ldots)$, $s_g(A_5) = (-\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \ldots)$, то, как мы уже показали выше, для функций $\tau_{A_2 B}$, $\tau_{A_3 B}$, $\tau_{A_5 B}$ справедливо утверждение леммы. Тем самым, учитывая индуктивное предположение для функций $\tau_{A_1 B}$, $\tau_{A_4 B}$, получаем утверждение леммы для τ_W. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть $W \in \Gamma$ — произвольное слово. Если $d_1(W) + \ldots + d_i(W) \leqslant n$, то $\tau_W = P(\tau_{W_1}, \ldots, \tau_{W_s})$, $P \in \mathbb{Z}[y_1, \ldots, y_s]$, причем все W_j, $1 \leqslant j \leqslant s$, обладают свойством*

$$d_1(W_j) + \ldots + d_i(W_j) + d_{i+1}(W_j) \leqslant 3n.$$

Доказательство. Воспользуемся индукцией по $d_{i+1}(W)$. Если $d_{i+1}(W) = 0$, то утверждение леммы очевидно. Пусть утверждение леммы справедливо для всех $W \in \Gamma$, таких, что $d_1(W) + \ldots + d_i(W) \leqslant n$, $d_{i+1}(W) < r$. Предположим теперь, что $d_{i+1}(W) = r$. W можно записать в виде $W = U_1 g_{i_1}^{n_1} \ldots U_k g_{i_k}^{n_k} U_{k+1}$, $1 \leqslant i_j \leqslant i$, $j = 1, \ldots, k$, $d_s(U_m) = 0$, $1 \leqslant s \leqslant i$, $1 \leqslant m \leqslant k+1$. Так как $\tau_W = \tau_{U_{k+1} U_1 g_{i_1}^{n_1} \ldots U_k g_{i_k}^{n_k}}$, то мы сразу можем считать, что $U_{k+1} = l$. Далее, $d_1(W) + \ldots + d_i(W) = |n_1| + \ldots + |n_k| \leqslant n$. Следовательно, $k \leqslant n$. Если $d_{i+1}(U_j) \leqslant 2$ для всех $j = 1, \ldots, k$, то $d_{i+1}(W) \leqslant 2k \leqslant 2n$ и $d_1(W) + \ldots + d_i(W) + d_{i+1}(W) \leqslant n + 2n = 3n$. Поэтому предположим, что для некоторого j, скажем, для $j = 1$, $d_{i+1}(U_1) > 2$. Положив $A = U_1$, $B = g_{n_1}^{n_1} U_2 \ldots U_k g_{i_k}^{n_k}$, $g = g_{i+1}$, мы имеем из леммы 6, что $\tau_W = P(\tau_{W_1}, \ldots, \tau_{W_s})$, где $P \in \mathbb{Z}[y_1, \ldots, y_s]$, $W_j = A_j B_j$, $d_1(A_j) = \ldots = d_i(A_j) = 0$, B_j равно либо B, либо e, $d_{i+1}(A_j) \leqslant 2$, $j = 1, 2, \ldots, s$. Если $B_j = e$, то $d_1(W_j) + \ldots + d_i(W_j) + d_{i+1}(W_j) \leqslant 2 < 3n$. Если $B_j = B$, то $d_{i+1}(W_j) = d_{i+1}(A_j B) \leqslant d_{i+1}(W) - d_{i+1}(U_1) + 2 < d_{i+1}(W)$, а $d_1(W_j) + \ldots + d_i(W_j) \leqslant n$. В силу предположения индукции утверждение леммы справедливо для всех функций τ_{W_j}, $1 \leqslant j \leqslant s$, а следовательно, и для τ_W. Лемма 7 доказана.

Доказательство теоремы 1. Утверждения 1 и 2 теоремы непосредственно следуют из лемм 3, 4. Утверждение 3 мы сейчас докажем с помощью лемм 6, 7. Достаточно рассмотреть случай свободной группы Γ. Если $W \in \Gamma$, то, по лемме 6, $\tau_W = P(\tau_{W_1}, \ldots, \tau_{W_s})$, $P \in \mathbb{Z}[y_1, \ldots, y_s]$, $d_1(W_j) \leqslant 2$, $j = 1, 2, \ldots, s$. Таким образом, мы можем считать, что $d_1(W) \leqslant 2$. Из леммы 7 следует, что

$$\tau_W = F(\tau_{V_1}, \ldots, \tau_{V_r}), \quad F \in \mathbb{Z}[y_1, \ldots, y_r],$$
$$d_1(V_i) + d_2(V_i) + \ldots + d_m(V_i) \leqslant 2 \cdot 3^{m-1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant r.$$

Остается заметить, что $d_1(V_i) + \ldots + d_m(V_i)$ есть длина слова V_i, а слов ограниченной длины в группе Γ конечное число. Итак, функции $\tau_{W_1}, \ldots, \tau_{W_s}$, где $W_1, \ldots, W_s$ — все различные слова длины, не превосходящей $2 \cdot 3^{m-1}$, порождают кольцо $\hat{T}(\Gamma, \mathrm{SL}_3(K))$. Теорема 1 полностью доказана.

§ 3. Кольца характеров представлений над полями положительной характеристики

В случае полей положительной характеристики ситуация несколько усложняется и требует более деликатного исследования. Контраст по сравнению с полями нулевой характеристики проявляется, например, в том, что K-алгебра $T_K(\Gamma, \mathrm{GL}_n(K))$ для поля нулевой характеристики всегда конечно порождена, в то время как для поля положительной характеристики эта алгебра может не быть конечно-порожденной.

Введем следующие обозначения: $C_r = \{1, 2, \ldots, r\}$, $D_r = \{\sigma : C_r \to C_p \mid \sigma$ инъективно$\}$.

Лемма 8. *Пусть k — поле характеристики $p > 0$, $(n_1, \ldots, n_r)$ — такой набор целых чисел, что $r \leqslant p$ и $n_1 + n_2 + \cdots + n_r \not\equiv 0 \pmod p$. Тогда рациональная функция*

$$\sum_{\sigma \in D_r} t_{\sigma(1)}^{n_1} t_{\sigma(2)}^{n_2} \cdot \ldots \cdot t_{\sigma(r)}^{n_r} \in K(t_1, \ldots, t_p)$$

не равна нулю.

Доказательство. Поскольку от перестановки чисел в наборе $(n_1, \ldots, n_r)$ рассматриваемая нами рациональная функция не изменяется, то без ограничения общности можно считать, что числа $n_1, \ldots, n_r$ расположены в неубывающем порядке, т. е.

$$n_1 = n_{i_0} = n_{i_0+1} = \ldots = n_{i_1} < n_{i_1+1} = \ldots = n_{i_2} < \ldots < n_{i_{s-1}+1} = \ldots = n_{i_s} = n_r.$$

Легко видеть, что каждая из s групп равных показателей содержит меньше p показателей, потому что в противном случае мы имели бы $r = p$ и $n_1 = n_2 = \ldots = n_p$, т. е. $n_1 + \ldots + n_p \equiv 0 \pmod p$ вопреки условию леммы. Другими словами, $i_k - i_{k-1} + 1 < p$ для $k = 1, 2, \ldots, s$. Пусть теперь φ, $\sigma \in D_r$. Рассмотрим два одночлена:

$$t_{\sigma(1)}^{n_1} \ldots t_{\sigma(r)}^{n_r} = t_{\sigma(i_0)}^{n_{i_1}} \ldots t_{\sigma(i_1)}^{n_{i_1}} \ldots t_{\sigma(i_{s-1}+1)}^{n_{i_s}} \ldots t_{\sigma(i_s)}^{n_{i_s}}$$

и

$$t_{\varphi(1)}^{n_1} \ldots t_{\varphi(r)}^{n_r} = t_{\varphi(i_0)}^{n_{i_1}} \ldots t_{\varphi(i_1)}^{n_{i_1}} \ldots t_{\varphi(i_{s-1}+1)}^{n_{i_s}} \ldots t_{\varphi(i_s)}^{n_{i_s}}.$$

Эти одночлены будут равны в том и только в том случае, если одинаковые переменные входят в них с равными показателями, что выполняется тогда и только тогда, когда числа $\varphi(i_{j-1}+1), \ldots, \varphi(i_j)$ являются перестановкой чисел $\sigma(i_{j-1}+1), \ldots, \sigma(i_j)$ для всех $j = 1, 2, \ldots, s$. Следовательно, для любого заданного одночлена из суммы $\sum\limits_{\sigma \in D_r} t_{\sigma(1)}^{n_1} \cdot \ldots \cdot t_{\sigma(r)}^{n_r}$ в этой сумме имеется ровно

$$c_{(n_1, \ldots, n_r)} = (i_2 - i_0 + 1)!\,(i_2 - i_1 + 1)! \ldots (i_s - i_{s-1} + 1)! \tag{14}$$

равных ему одночленов (включая и рассматриваемый). Число $c_{(n_1, \ldots, n_r)}$ не зависит от выбора одночлена, а полностью определяется набором $(n_1, \ldots, n_r)$. Очевидно что $c_{(n_1, \ldots, n_r)} \not\equiv 0 \pmod p$, поскольку $i_j - i_{j-1} + 1 < p$ для $1 \leqslant j \leqslant s$. Следовательно, рассматриваемая рациональная функция не равна нулю. Лемма 8 доказана.

Теорема 2. *Пусть K — бесконечное поле характеристики $p > 0$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) для любой группы Γ кольцо $T(\Gamma, \mathrm{GL}_n(K))$ конечно порождено при $n < p$, а кольцо $T(\Gamma, \mathrm{SL}_n(K))$ конечно порождено при $n < 2p$;

2) *если группа* Γ *обладает бесконечной циклической фактор-группой, то* K*-алгебры* $T_K(\Gamma, \mathrm{GL}_n(K))$ *и* $T_K(\Gamma, \mathrm{SL}_n(K))$ *не являются конечно-порожденными соответственно при* $n \geqslant p$ *и* $n \geqslant 2p$.

Доказательство. Первое утверждение теоремы 2, а именно утверждение о конечной порожденности кольца $T(\Gamma, \mathrm{GL}_n(K))$, может быть выведено из следующего результата К. Прочези [7]. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_m$ — набор из m общих матриц в $M_n(\Omega)$, где $\Omega \supset K$. Прочези доказал, что кольцо A, порожденное всеми функциями $\sigma_i(W)$, $i=1, 2, \ldots, n$, где σ_i обозначает i-й коэффициент характеристического полинома матрицы W, а W пробегает все одночлены от $X_1, \ldots, X_m$, является конечно-порожденным. Из условия $n < p$ следует, что всякое $\sigma_i(W)$ можно выразить в виде полинома от $\mathrm{tr}\, W$, $\mathrm{tr}\, W^2, \ldots, \mathrm{tr}\, W^i$ с коэффициентами из поля $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Значит, кольцо A может быть порождено конечным числом следов $\mathrm{tr}\, W_1, \ldots, \mathrm{tr}\, W_d$. Относительно системы образующих $g_1, \ldots, g_m$ группы Γ мы можем без ограничения общности предполагать, что вместе с каждым g_i она содержит и g_i^{-1}. Используя специализацию $X_i \to g_i$, мы получаем, что функции $\tau_{\bar{W}_1}, \ldots, \tau_{\bar{W}_d}$ порождают кольцо $T(\Gamma, \mathrm{GL}_n(K))$, где $\bar{W}$ обозначает элемент группы Γ, получающийся из одночлена W в результате специализации $X_i \to g_i$.

Конечная порожденность кольца $T(\Gamma, \mathrm{GL}_n(K))$ в случае $n < p$ влечет конечную порожденность $T(\Gamma, \mathrm{SL}_n(K))$. Если же $p \leqslant n < 2p$, то сделаем следующее наблюдение. Пусть X — произвольная матрица из $\mathrm{SL}_n(K)$. Тогда если $p \leqslant i < n$, то $\sigma_i(X) = (1/\det X)\,\sigma_{n-i}(X^{-1}) = \sigma_{n-i}(X^{-1})$. Поскольку $n-i < p$, то $\sigma_{n-i}(X^{-1})$ можно выразить через $\mathrm{tr}\, X^{-1}$, $\mathrm{tr}\, X^{-2}, \ldots, \mathrm{tr}\, X^{i-n}$ с коэффициентами из поля $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Отсюда с учетом теории Прочези следует конечная порожденность $T(\Gamma, \mathrm{SL}_n(K))$ для $p \leqslant n < 2p$.

Основная тяжесть в доказательстве теоремы 2 ложится на второе утверждение. В соответствии с леммой 2 достаточно доказать это утверждение для $n=p$. Кроме того, можно считать, что $\Gamma = \langle g \rangle$ — бесконечная циклическая группа. Предположим противное, т. е. пусть существует конечная система образующих τ_{g^i}, $-l \leqslant i \leqslant l$, алгебры $T_K(\Gamma, \mathrm{GL}_p(K))$. Тогда для $m \in \mathbb{Z}$, $m > l$, $(m, p)=1$, мы имеем равенство

$$\tau_{g^m} = \sum_{(i_1, \ldots, i_s)} a_{i_1 \ldots i_s}(m)\, \tau_{g^{i_1}} \ldots \tau_{g^{i_s}}, \tag{15}$$

где $-l \leqslant i_j \leqslant l$, $j=1, 2, \ldots, s$, $a_{i_1 \ldots i_s}(m) \in K$. Как и при доказательстве леммы 3, замечаем, что $i_1 + i_2 + \ldots + i_s = m$, в частности, в каждом наборе $(i_1, \ldots i_s)$ $s \geqslant 2$. Если для произвольной диагональной матрицы $t = \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n)$ рассмотреть представление $g \mapsto t$, то из (15) получим равенство

$$t_1^m + \ldots + t_p^m = \sum_{(i_1, \ldots, i_s)} a_{i_1 \ldots i_s}(m) \prod_{j=1}^{s} \left(t_1^{i_j} + \ldots + t_p^{i_j}\right), \tag{16}$$

которое выполняется для любых $t_1, \ldots, t_p \in K^*$.

Произведение $\prod_{j=1}^{s} \left(t_1^{i_j} + \ldots + t_p^{i_j}\right)$ можно преобразовать к следующему виду:

$$\prod_{j=1}^{s} \left(t_1^{i_j} + \ldots + t_p^{i_j}\right) = \sum_{(n_1, \ldots, n_r)} b_{n_1 \ldots n_r}^{(i_1, \ldots, i_s)} \Big(\sum_{\sigma \in D_r} t_{\sigma(1)}^{n_1} \ldots t_{\sigma(r)}^{n_r}\Big), \tag{17}$$

где $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = m$ и суммирование ведется по неупорядоченным наборам $(n_1, \ldots, n_r)$. Равенство (17) получается следующим образом: если перемножить скобки в левой части (17), то мы получим сумму из p^s одночленов, причем вместе с одночленом $t_{i_1}^{n_1} \ldots t_{i_r}^{n_r}$ в эту сумму входят и все одночлены вида $t_{\sigma(1)}^{n_1} \ldots t_{\sigma(r)}^{n_r}$, $\sigma \in D_r$; таким образом, получаем сумму $\sum\limits_{\sigma \in D_r} t_{\sigma(1)}^{n_1} \ldots t_{\sigma(r)}^{n_r}$, а целое число $b_{n_1 \ldots n_r}^{(i_1, \ldots, i_s)}$ показывает, сколько таких одинаковых сумм наберется после перемножения скобок в левой части равенства (17).

По лемме 5, ни одна из сумм $\sum\limits_{\sigma \in D_r} t_{\sigma(1)}^{n_1} \ldots t_{\sigma(r)}^{n_r}$ не равна нулю и входящие в нее одночлены отличны от одночленов аналогичной суммы для другого набора $(m_1, \ldots, m_q) \neq (n_1, \ldots, n_r)$. Левая часть равенства (17) есть сумма p^s одночленов вида $t_{i_1}^{n_1} \ldots t_{i_r}^{n_r}$, а правая часть представляет собой сумму из $\sum\limits_{(n_1, \ldots, n_r)} b_{n_1 \ldots n_r}^{(i_1, \ldots, i_s)} |D_r|$ таких одночленов. Следовательно,

$$\sum_{(n_1, \ldots, n_r)} b_{n_1 \ldots n_r}^{(i_1, \ldots, i_s)} |D_r| = p^s.$$

Поскольку $|D_r| = p!/(p-r)!$, а $s \geqslant 2$, то

$$\sum_{(n_1, \ldots, n_r)} b_{n_1 \ldots n_r}^{(i_1, \ldots, i_s)} \frac{(p-r)!}{(p-1)!} \equiv 0 \pmod p. \tag{18}$$

Преобразуем равенство (16), используя (17):

$$\begin{aligned} t_1^m + \ldots + t_p^m &= \sum_{(i_1, \ldots, i_s)} a_{i_1 \ldots i_s}(m) \prod_{j=1}^{s} \left(t_1^{i_j} + \ldots + t_p^{i_j}\right) = \\ &= \sum_{(i_1, \ldots, i_s)} a_{i_1 \ldots i_s}(m) \left(\sum_{(n_1, \ldots, n_r)} b_{n_1 \ldots n_r}^{(i_1, \ldots, i_s)} \left(\sum_{\sigma \in D_r} t_{\sigma(1)}^{n_1} \ldots t_{\sigma(r)}^{n_r} \right)\right) = \\ &= \sum_{(n_1, \ldots, n_r)} c_{n_1 \ldots n_r} \left(\sum_{\sigma \in D_r} t_{\sigma(1)}^{n_1} \ldots t_{\sigma(r)}^{n_r} \right), \end{aligned} \tag{19}$$

где

$$c_{n_1 \ldots n_r} = \sum_{(i_1, \ldots, i_s)} a_{i_1 \ldots i_s}(m)\, b_{n_1 \ldots n_r}^{(i_1, \ldots, i_s)} \in K.$$

Пользуясь (18), получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} \sum_{(n_1, \ldots, n_r)} c_{n_1 \ldots n_r} \frac{(p-1)!}{(p-r)!} &= \sum_{(n_1, \ldots, n_r)} \sum_{(i_1, \ldots, i_s)} a_{i_1 \ldots i_s}(m)\, b_{n_1 \ldots n_r}^{(i_1, \ldots, i_s)} \frac{(p-1)!}{(p-r)!} = \\ &= \sum_{(i_1, \ldots, i_s)} a_{i_1 \ldots i_s}(m) \left(\sum_{(n_1, \ldots, n_s)} b_{n_1 \ldots n_r}^{(i_1, \ldots, i_s)} \frac{(p-1)!}{(p-r)!} \right) = 0. \end{aligned}$$

С другой стороны, из (19) следует, что $c_m = 1$, а все $c_{n_1 \ldots n_r} = 0$ при $r \geqslant 2$. Следовательно,

$$\sum_{(n_1, \ldots, n_r)} c_{n_1 \ldots n_r} \frac{(p-1)!}{(p-r)!} = 1 \cdot \frac{(p-1)!}{(p-1)!} = 1.$$

Полученное противоречие завершает доказательство бесконечной порожденности алгебры $T_K(\Gamma, \mathrm{GL}_p(K))$.

Чтобы завершить доказательство теоремы 2, необходимо показать, что алгебра $T_K(\Gamma, \mathrm{SL}_{2p}(K))$ не является конечно порожденной. В силу леммы 1 поле K можно считать алгебраически замкнутым. Рассмотрим вложение

$$\varepsilon : \mathrm{GL}_p(K) \to \mathrm{SL}_{2p}(K), \quad X \mapsto \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & \alpha E_p \end{pmatrix},$$

где $\alpha = (\det X)^{-1/p}$. Поскольку $\operatorname{tr} X = \operatorname{tr} \varepsilon(X)$, то $T_K(\Gamma, \mathrm{GL}_p(K)) = T_K(\Gamma, \varepsilon(\mathrm{GL}_p(K)))$. Так как $T_K(\Gamma, \varepsilon(\mathrm{GL}_p(K)))$ является гомоморфным образом K-алгебры $T_K(\Gamma, \mathrm{SL}_{2p}(K))$ и, как мы уже показали, K-алгебра $T_K(\Gamma, \mathrm{GL}_p(K))$ не является конечно-порожденной, то K-алгебра $T_K(\Gamma, \mathrm{SL}_{2p}(K))$ также не является конечно-порожденной. В силу леммы 2 K-алгебра $T_K(\Gamma, \mathrm{SL}_n(K))$ не является конечно-порожденной для всех $n \geqslant 2p$. Теорема 2 доказана.

Литература

1. Платонов В. П., Беняш-Кривец В. В. Кольца характеров n-мерных представлений конечно-порожденных групп // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 2. С. 293—297.
2. Bass H., Lubotzky A. Automorphisms of groups and of schemes of finite type // Israel J. Math. 1983. Vol. 44, N 1. P. 1—22.
3. Culler M., Shalen P. Varieties of group representations and splittings of 3-mani folds // Ann. Math. 1983. Vol. 117, N 1. P. 109—146.
4. Fricke R., Klein F. Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen. Leipzig; Berlin, 1897.
5. Horowitz R. Characters of free groups represented in the two dimensional linear group // Comm. Pure Appl. Math. 1972. Vol. 25, N 6. P. 635—649.
6. Magnus W. The uses of 2 by 2 matrices in combinatorial group theory // Result. Math. 1981. Vol. 4, N 2. P. 171—192.
7. Procesi C. Finite-dimensional representations of algebras // Israel J. Math. 1974. Vol. 19, N 3. P. 169—182.
8. Procesi C. The invariant theory of n by n matrices // Advances in Math. 1976. Vol. 19, N 3. P. 306—351.
9. Vogt H. Sur les invariants fondamentaux des équations différentielles linéaires du second ordre // Ann. Sci. École Norm. Supér. 1889. T. 6. P. 3—72.

Д. А. СУПРУНЕНКО

О СОПРЯЖЕННОСТИ В СПЕЦИАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЕ

1. F — произвольное поле, F^* — мультипликативная группа поля F, а H — подгруппа полной линейной группы $GL(n, F)$. С подгруппой H свяжем группу определителей $\mathrm{Det} H$ ее матриц:

$$\mathrm{Det}\, H = \{\lambda \in F \mid \lambda = \det h,\ h \in H\}, \tag{1}$$

где $\det h$ — определитель матрицы h. Ясно, что $\mathrm{Det}\, H$ — подгруппа F^*, а при $H = GL(n, F)$, как легко видеть, $\mathrm{Det}\, H = F^*$. Пусть L — подмножество группы $GL(n, F)$, обладающее следующим свойством: для каждого смежного класса K группы F^* по подгруппе $\mathrm{Det}\, H$ в L имеется одна и только одна матрица a, такая, что $\det a \in K$. Очевидно, $|L| = |F^*/\mathrm{Det}\, H|$.

Пусть теперь $\mathfrak{H}$ — класс подгрупп $GL(n, F)$, сопряженных в $GL(n, F)$ с подгруппой H. Введем совокупность $\mathfrak{H}_0$ подгрупп специальной линейной группы $SL(n, F)$, положив

$$\mathfrak{H}_0 = \{H_\alpha \cap SL(n, F) \mid H_\alpha \in \mathfrak{H}\}. \tag{2}$$

Как легко видеть, $\mathfrak{H}_0$ представляет собой объединение некоторого множества классов сопряженных подгрупп группы $SL(n, F)$. Обозначим это множество классов через $\mathfrak{M}(\mathfrak{H}_0)$.

2. Лемма 1. *Пусть $H_\alpha = g_\alpha H g_\alpha^{-1}$, $H_\beta = g_\beta H g_\beta^{-1}$, где $g_\alpha, g_\beta \in GL(n, F)$, а $\det g_\alpha$ и $\det g_\beta$ принадлежат одному и тому же смежному классу группы F^* по подгруппе $\mathrm{Det}\, H$. Тогда подгруппы $H_\alpha \cap SL(n, F)$ и $H_\beta \cap SL(n, F)$ сопряжены в $SL(n, F)$.*

Доказательство. Очевидно,

$$H_\beta = g_\beta g_\alpha^{-1} H_\alpha (g_\beta g_\alpha^{-1})^{-1}. \tag{3}$$