УДК 517.982

Я. В. РАДЫНО

ВЕКТОРЫ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА В ОПЕРАТОРНОМ ИСЧИСЛЕНИИ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

В настоящей работе предлагается конструкция, позволяющая по замкнутому неограниченному оператору в банаховом пространстве построить шкалу инвариантных относительно этого оператора банаховых пространств, на которых этот оператор ограничен, причем сохраняются основные спектральные характеристики. Тем самым эта конструкция позволяет изучать свойства решений дифференциально-операторных уравнений с неограниченными операторами путем сведения их к аналогичным уравнениям с ограниченными операторами.

Построенные инвариантные подпространства названы пространствами векторов экспоненциального типа. Установлен признак нетривиальности пространств таких векторов, содержащий в себе, как частный случай, известную теорему С. Н. Бернштейна о плотности функций экспоненциального типа в классе ограниченных равномерно непрерывных функций. Показано, что в этом случае банахово пространство может быть разложено в бесконечную сумму подпространств векторов экспоненциального типа, причем действие оператора A полностью определяется своим действием на этих подпространствах. Другими словами, дается «жорданово» разложение такого оператора.

Отметим также, что векторы экспоненциального типа являются аналитическими векторами в смысле Нельсона [1] и известная теорема Нельсона о самосопряженности симметрического оператора формулируется в терминах векторов экспоненциального типа.

Для дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений с аналитическими символами родственные идеи были применены в работах Ю. А. Дубинского [2]. Данная работа является продолжением цикла работ [3—5] и основные ее результаты были опубликованы в заметках [6—8].

1. Пространство векторов экспоненциального типа. Здесь вводится понятие вектора экспоненциального типа 6 относительно заданного неограниченного оператора в банаховом пространстве. Изучена алгебраическая и топологическая структуры пространства векторов экспоненциального типа и его сопряженного.

Пусть X — банахово пространство, $A: X \to X$ — замкнутый неограниченный оператор с областью определения $D(A)$. Через $D(A^n)$ обозначим пространство

$$D(A^n) = \{x \in X : x \in D(A),\ Ax \in D(A),\ \ldots,\ A^{n-1}x \in D(A)\}, \tag{1}$$

наделенное нормой

$$\|x\|_{D(A^n)} = \sum_{k=0}^{n} \|A^k x\|, \tag{2}$$

— это банахово пространство. Затем положим

$$D(A^\infty) = \bigcap_{k=0}^{\infty} D(A^k) \tag{3}$$

— пространство Фреше с нормами (2). Далее для каждого $\nu > 0$ определим пространство

$$D_A^\nu(X) = \{x \in X : \exists c(x, \nu) > 0,\ \|A^k x\| \leqslant c\nu^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots\}. \tag{4}$$

Задавая норму формулой

$$\|x\|_{D_A^\nu(X)} = \sup_{k \geqslant 0} \|A^k x\| / \nu^k, \tag{5}$$

получим снова банахово пространство. Оператор действует в этом банаховом пространстве и ограничен там же. В самом деле,

$$\|Ax\|_{D_A^\nu(X)} = \sup_{k \geqslant 0} \|A^{k+1} x\| / \nu^k \leqslant \nu \|x\|_{D_A^\nu(X)}. \tag{6}$$

Очевидно, что при $\nu_1 < \nu_2$ справедливо включение $D_A^{\nu_1}(X) \subset D_A^{\nu_2}(X)$, причем $\|x\|_{D_A^{\nu_2}(X)} \leqslant \|x\|_{D_A^{\nu_1}(X)}$ для всех $x \in D_A^{\nu_1}(X)$.

Образуем пространство

$$\mathrm{Exp}_A^\nu X = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_A^{\nu + 1/n}(X). \tag{7}$$

Элементы этого пространства назовем векторами экспоненциального типа $\leqslant \nu$, а само пространство — пространством векторов экспоненциального типа, не превосходящего ν. Наделенное топологией, определяемой нормами

$$\|x\|_{D_A^{\nu + \frac{1}{n}}(X)} = \sup_{k > 0} \|A^k x\| \Big/ \left(\nu + \frac{1}{n}\right)^k, \tag{8}$$

это пространство является пространством Фреше. Другими словами,

$$\mathrm{Exp}_A^{\nu} X = \operatorname*{lim\,proj}_{n\to+\infty} D_A^{\nu+1/n}(X). \tag{9}$$

Ввиду неравенства (6), оператор $A : \mathrm{Exp}_A^{\nu} X \to \mathrm{Exp}_A^{\nu} X$ непрерывен. Если $\nu_1 < \nu_2$, то пространство $\mathrm{Exp}_A^{\nu_1} X$ непрерывно вложено в пространство $\mathrm{Exp}_A^{\nu_2} X$. Поэтому можем образовать пространство $\mathrm{Exp}_A X = \bigcup\limits_{\nu>0} \mathrm{Exp}_A^{\nu} X$, которое назовем пространством векторов экспоненциального типа. На нем зададим топологию индуктивного предела, т. е.

$$\mathrm{Exp}_A X = \operatorname*{lim\,ind}_{\nu\to\infty} \mathrm{Exp}_A^{\nu} X. \tag{10}$$

Из свойств этой топологии следует, что оператор $A : \mathrm{Exp}_A X \to \mathrm{Exp}_A X$ непрерывен.

Теорема 1. *Справедливо алгебраическое и топологическое равенство*

$$\mathrm{Exp}_A X = \operatorname*{lim\,ind}_{\nu\to\infty} D_A^{\nu}(X).$$

Доказательство. Поскольку вложение $D_A^{\nu}(X) \subset \mathrm{Exp}_A^{\nu} X$ непрерывно, то в силу свойств индуктивной топологии имеем топологическое вложение $\operatorname*{lim\,ind}\limits_{\nu\to\infty} D_A^{\nu}(X) \subset \mathrm{Exp}_A X$. С другой стороны, для любого $\nu_1 > \nu$ имеем топологическое вложение $\mathrm{Exp}_A^{\nu} X \subset D_A^{\nu_1}(X)$ и тем самым топологическое вложение $\mathrm{Exp}_A^{\nu} X \subset \operatorname*{lim\,ind}\limits_{\nu\to\infty} D_A^{\nu}(X)$. Отсюда заключаем, что $\mathrm{Exp}_A X \subset \operatorname*{lim\,ind}\limits_{\nu\to\infty} D_A^{\nu}(X)$ вместе с топологиями.

Теорема 2. *Множество B ограничено в $\mathrm{Exp}_A X$ тогда и только тогда, когда оно содержится в одном из $D_A^{\nu}(X)$ и там ограничено.*

Доказательство. Достаточность очевидна в силу теоремы 1. Обратно, пусть $B \subset \mathrm{Exp}_A X$ ограничено, но не ограничено ни в одном $D_A^{\nu}(X)$. Следовательно, для каждого $\nu > 0$ и каждой последовательности $x_n \in B$ найдутся последовательности $L_n \to \infty$ и $k_n \in \mathbb{N}$ такие, что

$$\| A^{k_n} x_n \| > L_n \nu^{k_k} \text{ для всех } n. \tag{11}$$

Так как B ограничено в $\mathrm{Exp}_A X = \operatorname*{lim\,ind}\limits_{\nu\to\infty} D_A^{\nu}(X)$, то для любой выпуклой окрестности нуля V в $\operatorname{lim\,ind} D_A^{\nu}(X)$ найдется $\rho > 0$ такое, что $\rho B \subset V$.

Окрестность V определяется последовательностью чисел $(\eta_i)_{i\geqslant 1}$, как выпуклая оболочка объединения шаров с центром в нуле и радиуса η_i из пространства $D_A^i(X)$, т. е.

$$V(\eta_i) = \begin{cases} x = \sum\limits_i \lambda_i x_i : x_i \in D_A^i(X), \quad \| x_i \|_{D_A^i(X)} \leqslant \eta_i, \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad \sum\limits_i \lambda_i = 1, \\ \lambda_i = 0, \text{ за исключением конечного числа.} \end{cases}$$

Следовательно, если $x_n \in B$, то $\rho x_n \in V(\eta_i)$ или $x_n \in V(\eta_i)/\rho$. Это означает, что

$$x_n = \sum_i \lambda_{in} x_{in}, \ \lambda_{in} \geqslant 0, \ \sum_i \lambda_{in} = 1, \ x_{in} \in D_A^i(X), \ \rho \| A^k x_{in} \| \leqslant \eta_i i^k.$$

Отсюда получаем, что

$$\rho \| A^k x_n \| \leqslant \rho \sum_i \lambda_{in} \| A^k x_{in} \| \leqslant \sum_i \lambda_{in} \eta_i i^k \leqslant \sup_{i\geqslant 1} \eta_i i^k \sum_i \lambda_{in} = \sup_{i\geqslant 1} (\eta_i i^k). \tag{12}$$

Из неравенств (11) и (12) получаем, что

$$\rho L_n \nu^{k_n} \leqslant \sup_{i\geqslant 1} (\eta_i i^{k_n}) \tag{13}$$

для любых ν, η_i, k_n, $L_n \to \infty$.

Покажем, что это невозможно. Выберем $\eta_i \leqslant \inf_n \sqrt{L_n}(\nu/i)^{k_n}$. Тогда $\sup_{i\geqslant 1} \eta_i i^{k_n} \leqslant \sqrt{L_n}\nu^{k_n}$. Согласно (13), имеем, что $\rho L_n \nu^{k_n} \leqslant \sqrt{L_n}\nu^{k_n}$ или $\rho\sqrt{L_n} \leqslant 1$, что невозможно при $L_n \to \infty$. Это противоречие доказывает теорему.

Следствие. *Пространство* $\mathrm{Exp}_A X$ *отделимо и квазиполно.*

Вопрос о нетривиальности пространства $\mathrm{Exp}_A X$ не прост. Однако следующее утверждение очевидно.

Предложение 1. *Если оператор обладает полной системой собственных векторов, то пространство* $\mathrm{Exp}_A X$ *плотно в* X.

В самом деле, если $Ae_k = \lambda_k e_k$, $e_k \in D(A)$, то $e_k \in \mathrm{Exp}_A X$ для всех k. Следовательно, $\mathrm{Exp}_A X$ содержит пространство, порожденное векторами e_k.

Заметим, что если $A: H \to H$ — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H и $\nu > 0$, то $x_\nu = P_{[-\nu,\nu]}x \in D_A^\nu(H)$ для любого $x \in H$, где $P_{[-\nu,\nu]}$ — проекторнозначная мера. Поскольку множество векторов вида $P_{[-\nu,\nu]}x$ плотно в H, то в этом случае $\mathrm{Exp}_A H$ плотно в H.

Очевидно, что всякий элемент из $\mathrm{Exp}_A X$ является аналитическим вектором Нельсона, т. е. $\|A^k x\| \leqslant c\nu^k k!$ для некоторого $\nu > 0$ [9]. Поэтому теорему Нельсона [1, с. 227] можно сформулировать следующим образом: замкнутый симметрический оператор A самосопряжен тогда и только тогда, когда $\mathrm{Exp}_A H$ плотно в H.

Это утверждение показывает, что замкнутые операторы $A: X \to X$ с плотным множеством векторов экспоненциального типа являются естественными обобщениями самосопряженных операторов, и поэтому естественно надеятся получить «спектральную теорему» для таких операторов. Как уже отмечали, если $A: H \to H$ — самосопряженный оператор, то $\overline{\mathrm{Exp}_A H} = H$. Легко видеть, что в этом случае $\overline{\mathrm{Exp}_{iA} H} = H$ и оператор iA является генератором унитарной сильно непрерывной группы. Оказывается справедливым более общее утверждение.

Теорема 3. *Если* A — *генератор ограниченной сильно непрерывной группы* $G(t)$ *в банаховом пространстве* X, *то* $\mathrm{Exp}_A X$ *плотно в* X.

Доказательство. По условию теоремы $\|G(t)\| \leqslant M$ для всех $t \in \mathbf{R}$. Для любой $\varphi \in \mathscr{D}_{L_1(\mathbf{R})} = \{\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}) : \varphi^{(k)} \in L_1(\mathbf{R}),\ k = 0, 1, \dots\}$ положим

$$G(\varphi)x = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t)x\varphi(t)\,dt. \tag{14}$$

Так как $\varphi \in L_1(\mathbf{R})$, а $\|G(t)\| \leqslant M$, то интеграл в (14) существует. Легко проверяется, что для любого $x \in X$

$$G(\varphi)x \in D(A^\infty) \quad \text{и} \quad A^k G(\varphi)x = (-1)^k G(\varphi^{(k)})x. \tag{15}$$

Достаточно проверить равенство (15) для $k = 1$:

$$AG(\varphi)x = \lim_{h\to 0+} \frac{G(h)G(\varphi)x - G(\varphi)x}{h} = \lim_{h\to 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(t+h)x - G(t)x}{h}\varphi(t)\,dt =$$

$$= \lim_{h\to 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} G(t)x\,\frac{\varphi(t-h) - \varphi(t)}{h}\,dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} G(t)x\varphi'(t)\,dt = -G(\varphi')x.$$

Если $\varphi(t) \in D^{\nu}_{d/dt} L_1(\mathbf{R})$, т. е. $\|\varphi^{(k)}\|_{L_1(\mathbf{R})} \leqslant c\nu^k$, $k=0, 1, \ldots$, то $G(\varphi)x \in$ $\in D^{\nu}_A(X)$. Действительно,

$$\|A^k G(\varphi)x\| = \|(-1)^k \int_{-\infty}^{+\infty} G(t) x \varphi^{(k)}(t)\, dt\| \leqslant \|G(t)x\| \times$$

$$\times \|\varphi^{(k)}\|_{L_1(\mathbf{R})} \leqslant M\|x\| c\nu^k, \quad k=0, 1, 2, \ldots$$

Таким образом, если $\varphi \in \mathrm{Exp}_{d/dt} L_1(\mathbf{R})$, то $G(\varphi)x \in \mathrm{Exp}_A X$ для любого $x \in X$.

Пусть задана $\rho_n(t)$ — регуляризующая последовательность, т. е. последовательность, удовлетворяющая свойствам: 1) $\rho_n(t) \geqslant 0$; 2) $\rho_n(t) \in$ $\in \mathcal{D}(\mathbf{R})$; 3) $\operatorname{supp} \rho_n \subset [-1/n, 1/n]$; 4) $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(t)\, dt = 1$.

Для каждого $x \in X$ положим $x_n = G(\rho_n)x$. Нетрудно видеть, что $x =$ $= \lim_{n\to\infty} x_n$. В самом деле,

$$\|x_n - x\| = \|G(\rho_n)x - x\| = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} [G(t)x - G(0)x]\rho_n(t)\, dt \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{-1/n \leqslant t \leqslant 1/n} \|G(t)x - x\| \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(t)\, dt = \sup_{|t| \leqslant 1/n} \|G(t)x - x\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Обозначим $H^2_1(\mathbf{R})$ пространство С. М. Никольского [10, с. 189]. Тогда, как следствие одной теоремы С. М. Никольского об аппроксимации [10, с. 221] и характеристики пространства $\mathrm{Exp}_{d/dt} L_1(\mathbf{R})$ (см. пример 2, п. 2), вытекает, что $\mathrm{Exp}_{d/dt} L_1(\mathbf{R})$ плотно в $H^2_1(\mathbf{R})$ в норме $L_1(\mathbf{R})$. Поскольку $\mathcal{D}(\mathbf{R}) \subset H^2_1(\mathbf{R})$, то для каждого $\rho_n(t) \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ найдется $\varphi_n(t) \in$ $\in \mathrm{Exp}_{d/dt} L_1(\mathbf{R})$ такая, что $\|\rho_n - \varphi_n\|_{L_1(\mathbf{R})} \leqslant 1/n$. Обозначим $x^*_n = G(\varphi_n)x_\nu \in$ $\in \mathrm{Exp}_A X$. Тогда $\|x^*_n - x\| \leqslant \|x^*_n - x_n\| + \|x_n - x\| = \|x_n - x\| + \|G(\rho_n)x -$ $- G(\varphi_n)x\| \leqslant \|x_n - x\| + \int_{-\infty}^{+\infty} \|G(t)x\| |\rho_n(t) - \varphi_n(t)|\, dt \leqslant \|x_n - x\| + M\|x\| \times$ $\times \|\rho_n - \varphi_n\|_{L_1(\mathbf{R})} \leqslant \|x_n - x\| + \dfrac{M\|x\|}{n} \to 0$, $n \to \infty$. Теорема доказана.

Замечание 1. Классический пример Р. Филлипса показывает, что в теореме 3 недостаточно предположить, что A — генератор ограниченной сильно непрерывной полугруппы [6].

Замечание 2. Отметим, что если $X = C_b(\mathbf{R})$ — пространство равномерно непрерывных ограниченных функций, $A = d/dt$, то теорема 3 дает (см. п. 2, пример 1) известный результат С. Н. Бернштейна; если же $X = L_p(\mathbf{R})$ и $A = d/dt$, то получим теорему С. М. Никольского.

Сейчас предположим, что банахово пространство X рефлексивно, а оператор A такой, что $\mathrm{Exp}_A X$ плотно в X и $\mathrm{Exp}_{A^*} X^*$ плотно в X^*. В таком случае имеем цепочку непрерывно и плотно вложенных пространств

$$\mathrm{Exp}_A X \subset D(A^\infty) \subset X \subset D(A^{*\infty})' \subset (\mathrm{Exp}_{A^*} X^*)'. \qquad (16)$$

Здесь $D(A^{*\infty})'$ и $(\mathrm{Exp}_{A^*} X^*)'$ сильно сопряженные к пространствам $D(A^{*\infty})$ и $\mathrm{Exp}_{A^*} X^*$. Ввиду включений (16) непрерывный оператор $A^{*\prime} : (\mathrm{Exp}_{A^*} X^*)' \to (\mathrm{Exp}_{A^*} X^*)'$, являющийся сопряженным к оператору $A : \mathrm{Exp}_A X \to \mathrm{Exp}_A X$, естественно назвать слабым расширением оператора A.

Теорема 4. *Всякий элемент $f \in (\operatorname{Exp}_A X)'$ может быть (не единственным образом) представлен в виде*

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} A^{*k} e_k \quad (\text{равенство в слабом смысле}), \tag{17}$$

где $e_k \in X^*$ такие, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \nu^k \|e_k\| < +\infty \quad \forall \nu, \tag{18}$$

причем сильная топология пространства $(\operatorname{Exp}_A X)'$ задается нормами

$$\|f\|_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k \|e_k\|. \tag{19}$$

Обратно, всякий элемент вида (17) с условием (18) принадлежит $(\operatorname{Exp}_A X)'$

Доказательство. Пусть $f \in (\operatorname{Exp}_A X)'$. Следовательно, f является линейным ограниченным функционалом на каждом $D_A^\nu(X)$.

Обозначим через $E_\nu(X)$ пространство последовательностей $\hat{x} = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, $x_k \in X$, таких, что $\|x_k\| \leqslant c\nu^k$, $k = 0, 1, \ldots$ Оно является банаховым пространством с нормой $\|\hat{x}\| = \sup_{k \geqslant 0} \|x_k\|/\nu^k$. Отображение $J : D_A^\nu(X) \ni x \to Jx = (x, Ax, A^2x, \ldots) \in E_\nu(X)$ является линейной изометрией $D_A^\nu(X)$ на замкнутое подпространство G в $E_\nu(X)$. В связи с этим каждый линейный ограниченный функционал f на $D_A^\nu(X)$ может быть представлен в виде $f = \bar{f} \circ J$, где $\bar{f} \in E'_\nu(X)/G^\perp = G'$. Согласно предложению 3 гл. 1 [11], функционал $\bar{f}$ определяется последовательностью (e_k), $e_k \in X^*$, удовлетворяющей условиям (17), причем $\bar{f}(\hat{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle x_k, e_k \rangle$.

Отсюда заключаем, что $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle A^k x, e_k \rangle$ для любого $x \in D_A^\nu(X)$. Последний ряд сходится ввиду условия (18). Действительно,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\langle A^k x, e_k \rangle| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|A^k x\| \|e_k\| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A^k x\|}{\nu^k} \nu^k \|e_k\| \leqslant$$

$$\leqslant \|x\|_{D_A^\nu(X)} \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k \|e_k\| < +\infty.$$

Из этой же оценки видно, что всякий элемент f вида (17) с условием (18) является непрерывным линейным функционалом на $\operatorname{Exp}_A X$.

2. Примеры пространств векторов экспоненциального типа. 1. Пусть $X = C_b(\mathbf{R})$ — пространство непрерывных ограниченных функций на $\mathbf{R}$ с естественной нормой $\|x\| = \sup_{t \in R} |x(t)|$, $A = d/dt$ — замкнутый оператор с областью определения $D(A) = C_b^1(\mathbf{R})$. Тогда

$$D_{d/dt}^\nu(C_b(\mathbf{R})) = \{x \in \mathscr{B}^\infty(\mathbf{R}) : \sup_{t \in \mathbf{R}} |x^{(k)}(t)| \leqslant c\nu^k,\ k = 0, 1, \ldots\}, \tag{20}$$

где $\mathscr{B}^\infty(\mathbf{R})$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций, производные любого порядка у которых ограничены. Тогда справедлива

Теорема 5 [12, с. 183]. *Пространство $\operatorname{Exp}_{d/dt}^\nu C_b(\mathbf{R})$ совпадает с пространством $\mathfrak{M}_\nu$ [10, с. 101] целых функций экспоненциального типа $\leqslant \nu$, ограниченных на действительной оси.*

2. Положим $X = L_p(\mathbf{R})$, $1 \leqslant p < +\infty$, $A = d/dt$ — оператор обобщенного дифференцирования, $D(A) = W_p^1(\mathbf{R})$. Тогда

$$\mathscr{D}_{d/d}^\nu L_p(\mathbf{R}) = \{x \in \mathscr{D}_{L_p(\mathbf{R})} : \|x^{(k)}\|_{L_p(\mathbf{R})} \leqslant c\nu^k,\quad k = 0, 1, \ldots\}. \tag{21}$$

Здесь $\mathscr{D}_{L_p(\mathbf{R})} = \{x(t) \in C^\infty(\mathbf{R}) : x^{(k)}(t) \in L_p(\mathbf{R}) \ \forall k\}$.

По теореме вложения Соболева справедливо неравенство

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} |x(t)| \leqslant c_1 \max(\|x\|_{L_p(\mathbf{R})}, \ \|x'\|_{L_p(\mathbf{R})}).$$

Отсюда $\sup\limits_{t \in \mathbf{R}} |x^{(k)}(t)| \leqslant cc_1 \max(1, \ \nu) \nu^k \equiv c_0 \nu^k \quad \forall k$. Следовательно, $\mathscr{D}^\nu_{d/dt} L_p(\mathbf{R}) \subset \mathscr{D}^\nu_{d/dt} C_b(\mathbf{R})$ и $\mathrm{Exp}^\nu_{d/dt} L_p(\mathbf{R}) \subset \mathrm{Exp}^\nu_{d/dt} C_b(\mathbf{R})$. Поэтому пространство $\mathrm{Exp}^\nu_{d/dt} L_p(\mathbf{R})$ содержится в пространстве $\mathfrak{M}_{\nu p}$ [10, с. 121] целых функций экспоненциального типа $\leqslant \nu$, принадлежащих пространству $L_p(\mathbf{R})$ на действительной оси. Обратно, пусть $x(t) \in \mathfrak{M}_{\nu p}$. Тогда, согласно неравенству Бернштейна [10, с. 137], $\|x^{(k)}\|_{L_p(\mathbf{R})} \leqslant \nu^k \|x\|_{L_p(\mathbf{R})}$, т. е. $x(t) \in \mathscr{D}^\nu_{d/dt} L_p(\mathbf{R})$.

Таким образом, справедлива

Теорема 6. *Пространство* $\mathrm{Exp}^\nu_{d/dt} L_p(\mathbf{R})$ *совпадает с пространством* $\mathfrak{M}_{\nu p}$ *целых функций экспоненциального типа* $\leqslant \nu$, *принадлежащих* $L_p(\mathbf{R})$ *на действительной оси.*

3. Пусть $X = C[a, b]$, $A = d/dt$, $D(A) = C^1[a, b]$. Тогда

$$D^\nu_{d/dt} C[a, b] = \{x \in C^\infty[a, b] : |x^{(k)}(t)| \leqslant c\nu^k, \ k = 0, 1, \ldots\}. \quad (22)$$

Запишем $x(t+h)$, $t+h \in [a, b]$ в виде

$$x(t+h) = x(t) + \frac{x'(t)}{1!} h + \frac{x''(t)}{2!} h^2 + \ldots + \frac{x^{(k)}(t+\theta h)}{k!} h^k, \quad 0 < \theta < 1.$$

Остаточный член формулы Тейлора допускает в этом случае оценку

$$\left| \frac{x^{(k)}(t+\theta h)}{k!} h^k \right| \leqslant c \frac{\nu^k h^k}{k!} \to 0, \ k \to \infty.$$

Поэтому функции из $D^\nu_{d/dt} C[a, b]$ являются аналитическими на $[a, b]$. Поскольку ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^{(k)}(t)}{k!} h^k$, $t \in [a, b]$, в силу оценки (22) сходится для любых $h \in \mathbf{C}$, то он определяет продолжение функции $x(t)$ целым образом во всю комплексную плоскость. Из этой же оценки имеем для любых $t \in [a, b]$ и любых $s \in \mathbf{R}$

$$|x(t+is)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{x^{(k)}(t)}{k!} (is)^k \right| \leqslant ce^{\nu|s|}. \quad (23)$$

Так как $x(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^{(k)}(0)}{k!} z^k$ и можно всегда считать, что $0 \in [a, b]$, то из (22) получаем

$$|x(t+is)| = |x(z)| \leqslant ce^{\nu|z|} \quad \forall t, \ s \in \mathbf{R}. \quad (24)$$

Таким образом, каждая функция из $D^\nu_{\frac{d}{dt}} C[a, b]$ допускает продолжение до целой функции, удовлетворяющей оценке (24).

Обратно, согласно теореме 3 [13, § 7, гл. IV], если целая аналитическая функция $x(z)$ удовлетворяет оценке (24), то для любого $k = 0, 1, \ldots$ $|x^{(k)}(t)| \leqslant c_1 \nu_1^k e^{\nu_2|t|}$ $\forall t \in \mathbf{R}$ или $\sup\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x^{(k)}(t)| \leqslant c_2 \nu_1^k$, $k = 0, 1, \ldots$ Другими словами, справедлива

Теорема 7. *Пространство* $\mathrm{Exp}_{d/dt} C[a, b]$ *состоит из целых аналити-*

ческих функций экспоненциального типа, т. е. целых функций $x(z)$ *таких, что существуют* $c>0$ *и* ν *такие, что*

$$|x(z)|\leqslant ce^{\nu|z|}. \tag{25}$$

4. Если $X=L_p(a, b)$, $A=d/dt$, $D(A)=W_p^1(a, b)$, то по теореме вложения $\sup\limits_t |x(t)|\leqslant c_1 \max(\|x\|_{L_p(a,b)}, \|x'\|_{L_p(a,b)})$. Поэтому с учетом предыдущей теоремы имеет место

Теорема 8. *Пространство* $\mathrm{Exp}_{d/dt}L_p(a, b)$ *совпадает с пространством* $\mathrm{Exp}\,\mathbf{C}$ *целых функций экспоненциального типа.*

Таким образом, из теорем 7 и 8 получим алгебраические равенства

$$\mathrm{Exp}_{d/dt}\, C[a, b]=\mathrm{Exp}_{d/dt}\, L_p(a, b)=\mathrm{Exp}\,\mathbf{C}. \tag{26}$$

Поскольку пространство $\mathrm{Exp}\mathbf{C}$ состоит из целых функций $x(z)$, для которых существуют константы c и ν, такие, что для всех $z\in\mathbf{C}$ выполняется неравенство (25), то оно естественным образом топологизируется. А именно для каждого $\nu>0$ обозначим

$$\mathrm{Exp}^{\nu}\,\mathbf{C}=\{x(z)\,:\,|x(z)|\leqslant ce^{\nu|z|},\ \ z\in\mathbf{C}\}. \tag{27}$$

В пространстве $\mathrm{Exp}^{\nu}\,\mathbf{C}$ определим норму по формуле

$$\|x\|_{\nu}=\sup_{z\in\mathbf{C}}|x(z)|/e^{\nu|z|}, \tag{28}$$

после чего оно становится банаховым. Очевидно, что $\mathrm{Exp}^{\nu_1}\,\mathbf{C}\subset\mathrm{Exp}^{\nu_2}\,\mathbf{C}$, если $\nu_1<\nu_2$, причем вложение компактно. Поскольку $\mathrm{Exp}\,\mathbf{C}=\bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty}\mathrm{Exp}^{\nu}\,\mathbf{C}$, то на $\mathrm{Exp}\,\mathbf{C}$ естественно задать топологию индуктивного предела, т. е. $\mathrm{Exp}\,\mathbf{C}=\lim\limits_{\nu\to\infty}\mathrm{ind}\,\mathrm{Exp}^{\nu}\,\mathbf{C}$, которую обозначим τ. Пространство $\mathrm{Exp}\,\mathbf{C}$ с этой топологией является локально выпуклым пространством типа (LN^*) [14]. Канонические топологии пространств $\mathrm{Exp}_{d/dt}\,C[a, b]$ и $\mathrm{Exp}_{d/dt}\,L_p(a, b)$ обозначим τ_1 и τ_2 соответственно. Поскольку $D(d/dt)=C^1[a, b]$ компактно вложено в $X=C[a, b]$, а $D(d/dt)=W_p^1(a, b)$ компактно вложено в $X=L_p(a, b)$, то пространства $\mathrm{Exp}_{d/dt}\,C[a, b]$ и $\mathrm{Exp}_{d/dt}\,L_p(a, b)$ со своими каноническими топологиями τ_1 и τ_2 соответственно являются пространствами типа (LN^*).

Так как для пространств типа (LN^*) справедлива теорема о замкнутом графике [6, с. 230], то для совпадения топологий τ, τ_1 и τ_2 достаточно показать, что они сравнимы между собой. Поскольку

$$\sup_{k\geqslant 0}\frac{\|x^{(k)}\|_{L_p}}{\nu^k}\leqslant c\sup_{k\geqslant 0}\ \sup_t\frac{|x^{(k)}(t)|}{\nu^k},$$

то топология τ_1 сильнее топологии τ_2 и, следовательно, по теореме о замкнутом графике они совпадают. Другое их совпадение видно из теорем вложения Соболева.

Чтобы доказать, что $\tau\leqslant\tau_1$, достаточно установить непрерывность тождественного отображения $I\colon \mathrm{Exp}_{d/dt}C[a, b]\to\mathrm{Exp}\,\mathbf{C}$. Поскольку обе топологии τ и τ_2 борнологичны, то достаточно установить ограниченность этого отображения. Другими словами, достаточно доказать, что каждое ограниченное множество в топологии τ_2 ограничено в топологии τ. Пусть $B\subset\mathrm{Exp}\mathbf{C}$ — ограниченное множество в топологии τ_1. Это означает, что найдутся $\nu>0$ и $c>0$ такие, что

$$\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|x^{(k)}(t)|\leqslant c\nu^k\ \text{ для всех }\ x\in B \tag{29}$$

(одно $c>0$ для всех $x\in B$). А это и есть неравенство (22).

Необходимая часть рассуждений теоремы 7 показывает, что из неравенства (22) следует (24), т. е. $|x(z)| \leqslant ce^{\nu|z|}$ для всех $x \in B$. Это значит, что множество B ограничено в топологии τ. Тем самым доказана

Теорема 9. *Пространства* $\mathrm{Exp}\,C$, $\mathrm{Exp}_{d/dt}C[a, b]$ и $\mathrm{Exp}_{d/dt}L_p(a, b)$ *совпадают алгебраически и топологически.*

3. Дифференциально-операторные уравнения. Пусть $D_A^1(X) \subset \cdots \cdots \subset D_A^\nu(X) \subset \cdots \subset X$. Образуем бесконечную сумму банаховых пространств $l_1(D_A^\nu(X);\ X) = \left\{x \in X : x = \sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu,\ \ x_\nu \in D_A^\nu(X),\ \sum_{\nu=1}^{\infty} \|x_\nu\|_{D_A^\nu(X)} < +\infty\right\}$

с нормой $\|x\|_{l_1(D_A^\nu;\ X)} = \inf \sum_{\nu=1}^{\infty} \|x_\nu\|_{D_A^\nu(X)}$, где нижняя грань берется по

всевозможным представлениям $x = \sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu$. Тогда справедлива

Теорема 10 [16]. *Если* $\mathrm{Exp}_A X$ *плотно в* X, *то каждый элемент* x *из* X *можно представить в виде ряда* $x = \sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu$, $x_\nu \in D_A^\nu(X)$, *так, что* $\sum_{\nu=1}^{\infty} \|x_\nu\|_{D_A^\nu(X)} < +\infty$ *и* $\|x\|_X = \inf \sum_{\nu=1}^{\infty} \|x_\nu\|_{D_A^\nu(X)}$, *причем если ряд* $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \|x_\nu\|_{D_A^\nu(X)}$ *сходится, то* $x \in D(A)$ *и* $Ax = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu x_\nu$, *где* A_ν *— сужение оператора* A *на подпространство* $D_A^\nu(X)$.

Обозначая $\mathrm{sp}\,A_\nu$ спектр оператора A_ν и $\mathrm{sp}_r A = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \mathrm{sp}\,A_\nu$, будем иметь теорему.

Теорема 11. *Если* $\mathrm{sp}\,A$ *— спектр оператора* A, *то справедливо включение* $\mathrm{sp}_r A \subset \mathrm{sp}\,A$.

Доказательство. Пусть $\lambda \notin \mathrm{sp}\,A$, т. е. $(\lambda I - A)^{-1} : X \to X$ — ограниченный оператор. Покажем, что для каждого $\nu > 0$ оператор $R(\lambda, A_\nu) = (\lambda I - A_\nu)^{-1} : D_A^\nu(X) \to D_A^\nu(X)$ ограничен. Пусть $x \in D_A^\nu(X)$, т. е. $\|A^k x\| \leqslant c\nu^k$, $k = 0, 1, \ldots$ Поскольку $A^k R(\lambda, A)x = R(\lambda, A)A^k x$ для любого $x \in D_A^\nu(X)$, то $R(\lambda; A)$ действует в $D_A^\nu(X)$ и

$$\|R(\lambda, A)x\|_{D_A^\nu(X)} = \sup_{k \geqslant 0} \frac{\|A^k R(\lambda, A)x\|}{\nu^k} \leqslant \|R(\lambda, A)\| \sup_{k \geqslant 0} \frac{\|A^k x\|}{\nu^k} + $$
$$+ \|R(\lambda, A)\|\, \|x\|_{D_A^\nu(X)}.$$

Теорема доказана.

В дальнейшем мы предполагаем, что $\overline{\mathrm{Exp}_A X} = X$. На примере дифференциально-операторного уравнения первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + f(t) \tag{30}$$

выясним вопрос о существовании, единственности и поведении его решений. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = Ax,\ \ x(0) = x_0. \tag{31}$$

Если $x_0 \in D_A^\nu(X)$, то и $x(t) = e^{tA_0}x_0 \in D_A^\nu(X)$. Если $x_0 \in D(A)$, то, согласно теореме 10, можем представить x_0 в виде $x_0 = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} x_{0\nu}$, где $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \nu \|x_{0\nu}\|_{D_A^\nu(X)} < +\infty$. Если $\|e^{tA_\nu}\| \leqslant Me^{|t|\omega}$ (например, когда $\operatorname{sp} A$ лежит в полосе $-\omega \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant \omega$), то ряды $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} e^{tA_\nu} x_{0\nu}$ и $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} A_\nu e^{tA_\nu} x_{0\nu}$ сходятся равномерно на каждом интервале $[\alpha, \beta]$. Поэтому функция $x(t) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} e^{tA_\nu} x_{0\nu}$ удовлетворяет задаче Коши (31).

Теорема 12. *Пусть* $f: \mathrm{R} \ni t \to f(t) \in X$ — *непрерывная ограниченная (T-периодическая, почти периодическая) функция, такая, что* $f(t) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(t)$, *где каждая* $f_\nu: \mathrm{R} \ni t \to f_\nu(t) \in D_A^\nu(X)$ — *непрерывная ограниченная (T-периодическая, почти периодическая) функция, причем ряд* $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \nu \|f_\nu(t)\|_\nu$ *сходится равномерно, и пусть спектр* $\operatorname{sp} A$ *оператора* A *не пересекается с мнимой осью. Тогда уравнение (30) имеет единственное ограниченное (T-периодическое, почти периодическое) решение.*

Доказательство. Рассмотрим сужение дифференциально-операторного уравнения (30) на подпространство $D_A^\nu(X)$:

$$dx_\nu/dt = A_\nu x_\nu(t) + f_\nu(t). \tag{32}$$

Пусть

$$G_{A_\nu}(t) = \begin{cases} e^{tA_\nu} P_{\nu-}, & t > 0, \\ -e^{-tA_\nu} P_{\nu+}, & t < 0, \end{cases} \tag{33}$$

— главная функция Грина уравнения (32).

Согласно предположению и теореме 11, $\operatorname{sp} A_\nu = \operatorname{sp}_+ A_\nu \cup \operatorname{sp}_- A_\nu$, где $\operatorname{sp}_\pm A_\nu$ — спектральные множества оператора A_ν, лежащие в правой и левой полуплоскостях. Операторы $P_{\nu\pm}$ — соответствующие спектральные проекторы: $P_{\nu\pm} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\pm} R(\lambda; A_\nu)\, d\lambda$. Здесь $\Gamma_\pm$ — контуры, охватывающие спектральные множества $\operatorname{sp}_\pm A_\nu$ соответственно.

Из свойств оператора A_ν и теоремы 11 в силу расположения спектра оператора A_ν имеем оценку [17, с. 48, 119]

$$\|G_{A_\nu}(t)\| \leqslant Ne^{-\mu|t|}. \tag{34}$$

Единственное ограниченное (T-периодическое, почти периодическое) решение уравнения (32) дается формулой

$$x_\nu(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_{A_\nu}(t-s) f_\nu(s)\, ds \tag{35}$$

[17, гл. II]. Из неравенства (34) будем иметь оценку

$$|x_\nu(t)| \leqslant \frac{2N}{\mu} \sup_{t \in R} |f_\nu(t)|. \tag{36}$$

Отсюда следует, что ряд $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \nu |x_\nu(t)|$ сходится равномерно. Согласно теореме 10, видно, что $x(t)=\sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu(t)$ является требуемым решением уравнения (30).

Автор выражает благодарность Л. Д. Кудрявцеву за постоянный интерес к работе, А. Б. Антоневичу, А. А. Дезину, Ю. А. Дубинскому, В. В. Жаринову и П. П. Забрейко за обсуждение результатов и критические замечания.

Литература

1. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики.— М.: Мир, 1978, т. 2.—400 с.
2. Дубинский Ю. А.— Успехи мат. наук, 1982, т. 37, № 5, с. 97—137.
3. Радыно Я. В.— Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 8, с. 1402—1410.
4. Радыно Я. В.— Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 9, с. 1615—1624.
5. Радыно Я. В.— Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 10, с. 1796—1803.
6. Радыно Я. В.— Докл. АН БССР, 1983, т. 27, № 9, с. 791—793.
7. Радыно Я. В.— Докл. АН БССР, 1983, т. 27, № 10, с. 875—878.
8. Радыно Я. В.— Докл. АН БССР, 1985, т. 29, № 6, с. 485—488.
9. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики.— М.: Мир, 1977, т. 1.—360 с.
10. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.— М.: Наука, 1969.—480 с.
11. Roumieu Ch.— Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 1960, vol. 77, N 3, p. 41—121.
12. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации.— М.: Наука, 1965.—408 с.
13. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Пространство основных и обобщенных функций.—М.: Физматгиз, 1958.—308 с.
14. Себаштьян-и-Сильва Ж.— Математика, 1957, т. 1, № 1, с. 60—77.
15. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства.— М.: Мир, 1967.—200 с.
16. Радыно Я. В.— Дифференц. уравнения, 1985, т. 21, № 2, с. 261—271.
17. Далецкий Ю. Л., Крейн С. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— М.: Мир, 1970.— 536 с.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию 22 января 1985 г.