

УДК 532.6:537.84

В. Г. Баштовой, А. М. Будник, В. К. Полевиков, А. Г. Рекс

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУХСВЯЗНЫХ РАВНОВЕСНЫХ ФОРМ МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ ВЕРТИКАЛЬНОГО ПРОВОДНИКА

Одной из преимущественных особенностей магнитных жидкостей является возможность формирования заданной конфигурации свободной поверхности с помощью магнитных полей. Для изучения этих вопросов предпочтительными являются осесимметричные формы поверхности, реализующиеся в магнитном поле вертикального цилиндрического проводника с током. В наиболее простых ситуациях такого рода задачи о равновесных формах магнитной жидкости допускают аналитическое решение [1—3], но в большинстве своем требуют привлечения численных методов. Самостоятельный интерес при этом приобретает разработка эффективных схем численного моделирования таких задач. Наиболее плодотворным при таком подходе является сочетание численного и физического эксперимента.

В настоящей работе теоретически и экспериментально исследуется осесимметричная форма ограниченного объема магнитной жидкости, расположенного у основания вертикального цилиндрического проводника с током I в месте пересечения его с горизонтальной плоскостью поверхностью, как изображено на рис. 1. Наличие проводника обуславливает двухсвязность области, занимаемой жидкостью. Объемная магнитная сила направлена к оси проводника и форма поверхности определяется действием магнитной, гравитационной и капиллярных сил.

1. Математическая постановка задачи включает в себя уравнение феррогидростатики

$$\nabla p = \rho g + \mu_0 M \nabla H \quad (1)$$

и условие капиллярного скачка давления на свободной поверхности

$$p = p_0 - \sigma(K_1 + K_2). \quad (2)$$

Здесь p — давление в жидкости, ρ — плотность, g — ускорение свободного падения, μ_0 — магнитная проницаемость вакуума, $M = M(H)$ — намагниченность жидкости, $H = I/2\pi r$ — напряженность магнитного поля проводника с током (в силу геометрии задачи поле имеет такой вид во всем рассматриваемом пространстве, в том числе и внутри жидкости); p_0 — давление в окружающей среде, σ — коэффициент поверхностного натяжения, K_1 и K_2 — кривизны главных нормальных сечений свободной поверхности (выпуклая поверхность жидкости имеет отрицательную кривизну).

Зависимость намагниченности от напряженности магнитного поля принимается ланжевеновской:

$$M = M^* \left(\operatorname{cth} \frac{H}{H_*} - \frac{H_*}{H} \right), \quad (3)$$

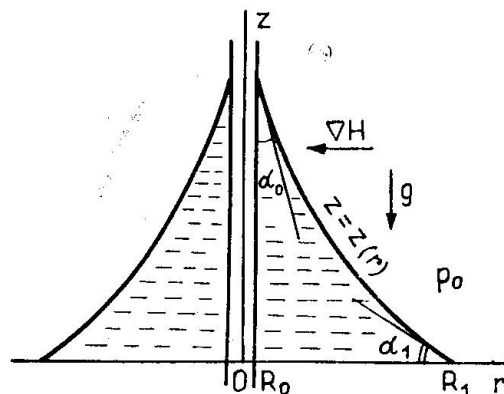


Рис. 1. Геометрические условия задачи.

где M^* — намагниченность насыщения магнитной жидкости, $H_* = kT/\mu_0 m$, k — постоянная Больцмана, m — намагниченность материала частицы, T — абсолютная температура ($T = \text{const}$).

Равновесную форму свободной поверхности будем описывать в параметрическом виде $z = z(s)$, $r = r(s)$, где s — длина дуги равновесной линии, отсчитываемая от точки контакта с проводником ($s = 0$) до точки контакта с плоскостью ($s = s_*$). С учетом выражения для суммы главных кривизн

$$K_1 + K_2 = \frac{1}{rr'}(rz')', \quad ' = \frac{d}{ds}$$

и соотношений (2), (3) для давления и намагниченности уравнение (1) можно преобразовать к виду

$$\frac{1}{rr'}(rz')' = \frac{\rho g}{\sigma} z - \frac{\mu_0 M^* H_*}{\sigma} \ln \left(\frac{2\pi H_* r}{I} \operatorname{sh} \frac{1}{2\pi H_* r} \right) + C, \quad (4)$$

где $z = z(s)$, $r = r(s)$, $0 < s < s_*$, C — неопределенная константа. Дифференцируя по s известное равенство

$$(z')^2 + (r')^2 = 1 \quad (5)$$

и учитывая (4), получим еще одно дифференциальное уравнение:

$$r'' = -z' \left[\frac{\rho g}{\sigma} z - \frac{\mu_0 M^* H_*}{\sigma} \ln \left(\frac{2\pi H_* r}{I} \operatorname{sh} \frac{1}{2\pi H_* r} \right) + C - \frac{z'}{r} \right]. \quad (6)$$

Обычные условия на линиях контакта сред

$$r(0) = R_0, \quad \frac{z'(0)}{r'(0)} = -\operatorname{ctg} \alpha_0, \quad z(s_*) = 0, \quad \frac{z'(s_*)}{r'(s_*)} = -\operatorname{tg} \alpha_1$$

запишем так, чтобы удовлетворялось (5):

$$r(0) = R_0, \quad z'(0) = -\cos \alpha_0, \quad r'(0) = \sin \alpha_0, \quad (7)$$

$$z(s_*) = 0, \quad z'(s_*) = -\sin \alpha_1, \quad r'(s_*) = \cos \alpha_1$$

(R_0 — радиус проводника, α_1 и α_0 — углы смачивания плоскости и проводника). Примем во внимание, что рассматриваемый сохраняющийся объем жидкости v можно вычислить как объем тела вращения:

$$v = 2\pi \int_0^{s_*} z r r' ds. \quad (8)$$

В формулах (4) — (8) введем безразмерные переменные

$$\bar{s} = \frac{s}{s_*}, \quad \bar{z} = \frac{z}{s_*}, \quad \bar{r} = \frac{r}{s_*}$$

и выберем в качестве параметров, определяющих решение задачи, следующие безразмерные комплексы: $\text{Bo} = \rho g R_0^2 / \sigma$ — число Бонда,

$$A_1 = \mu_0 \frac{M^* H_* R_0}{\sigma}, \quad A_2 = \frac{I}{2\pi H_* R_0}, \quad V = \frac{v}{R_0^3}.$$

С учетом вышесказанного в безразмерном виде постановка задачи записывается следующим образом:

$$(\bar{r}z')' = \bar{r}\bar{r}' \left[\text{Bo} \frac{\bar{z}}{\bar{r}^2(0)} - A_1 \varphi(\bar{r}) + C \right], \quad (9)$$

$$\bar{r}'' = -\bar{z}' \left[\text{Bo} \frac{\bar{z}}{\bar{r}^2(0)} - A_1 \varphi(\bar{r}) + C - \frac{\bar{z}'}{\bar{r}} \right], \quad 0 < \bar{s} < 1; \quad (10)$$

$$\bar{z}'(0) = -\cos \alpha_0, \quad r'(0) = \sin \alpha_0, \quad \bar{r}(0) = (I_1/V)^{1/3}; \quad (11)$$

$$\bar{z}'(1) = -\sin \alpha_1, \quad \bar{r}'(1) = \cos \alpha_1, \quad \bar{z}(1) = 0, \quad (12)$$

где

$$\bar{z} = \bar{z}(\bar{s}), \quad \bar{r} = \bar{r}(\bar{s}), \quad 0 \leq \bar{s} \leq 1, \quad ' = \frac{d}{d\bar{s}},$$

$$I_1 = 2\pi \int_0^1 \bar{z} \bar{r} \bar{r}' d\bar{s}, \quad \varphi = \frac{1}{\bar{r}(0)} \ln \left(\frac{\bar{r}}{A_2 \bar{r}(0)} \operatorname{sh} \frac{A_2 \bar{r}(0)}{\bar{r}} \right).$$

Интегрируя уравнение (9) по \bar{s} от 0 до 1 и учитывая условия (11), (12), определим постоянную C :

$$C = \frac{2}{\bar{r}^2(1) - \bar{r}^2(0)} \left(\bar{r}(0) \cos \alpha_0 - \bar{r}(1) \sin \alpha_1 + A_1 I_2 - \frac{Bo V \bar{r}(0)}{2\pi} \right), \quad (13)$$

где

$$I_2 = \int_0^1 \bar{r} \bar{r}' \varphi(\bar{r}) d\bar{s}. \quad (14)$$

Форма равновесной линии ищется как решение задачи (9)–(13) $\bar{z}(\bar{s})$, $\bar{r}(\bar{s})$, которое определяется шестью параметрами: Bo , A_1 , A_2 , V , α_0 , α_1 .

Задача (9)–(13) решалась численно с помощью итерационно-разностного подхода, описанного в работах [4, 5]. В результате численных расчетов были получены равновесные формы свободной поверхности капли магнитной жидкости в широком диапазоне изменения параметра A_2 ($0 \leq A_2 \leq 100$), характеризующего величину силы тока в проводнике. На рис. 2 представлены характерные равновесные формы капли при трех значениях A_2 : 100, 50 и 0 (линии 1, 2 и 3). Расчет был проведен при фиксированных параметрах $A_1 = 1$, $Bo = 1$, $V = 1$, $\alpha_0 = \alpha_1 = 45^\circ$ (рис. 2а), $\alpha_0 = \alpha_1 = 90^\circ$ (рис. 2б). На рис. 2 видно, как изменяется равновесная форма капли магнитной жидкости с увеличением A_2 . Ограниченность объема и фиксирование краевых углов α_0 и α_1 приводят к перемещению линии контакта капли с плоскостью в направлении проводника.

На рис. 3 приведены зависимости изменения основных геометрических характеристик капли от величины A_2 . Линии 1 и 2 представляют собой изменение высоты капли

$z(R_0)$ относительно начальной высоты z_0 при $A_2 = 0$ для углов смачивания 45 и 90° . Оказалось, что $z(R_0)/z_0$ в обоих случаях изменяется по линейному закону. Характер перемещения правой границы R_1/R_0 при увеличении A_2 изображают кривые 3 и 4 для $\alpha_0 = \alpha_1 = 45^\circ$ и $\alpha_0 = \alpha_1 = 90^\circ$.

2. Экспериментальное исследование поставленного во-

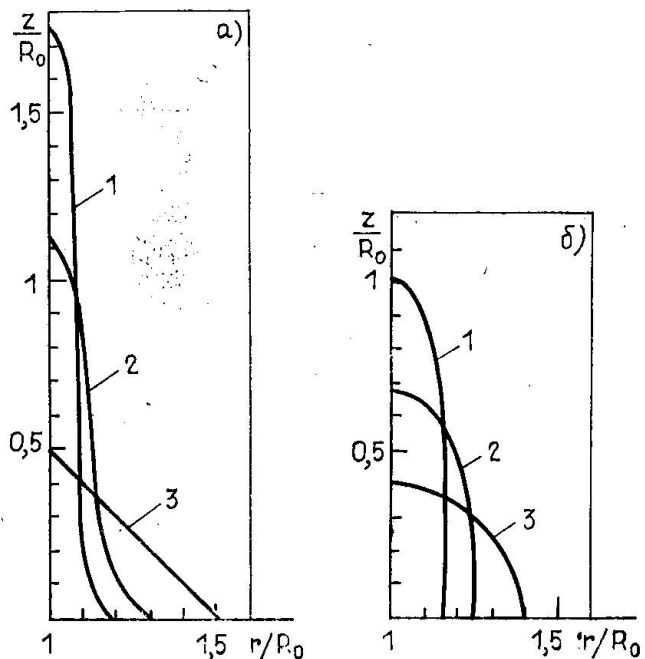


Рис. 2. Равновесные формы капли магнитной жидкости при фиксированных краевых углах: а — $\alpha_0 = \alpha_1 = 45^\circ$; б — $\alpha_0 = \alpha_1 = 90^\circ$.

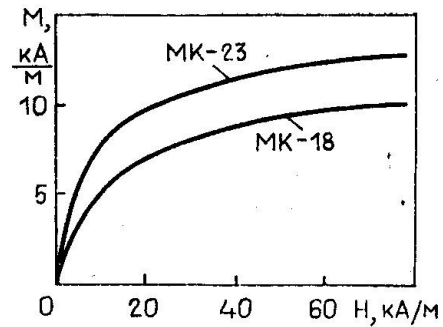
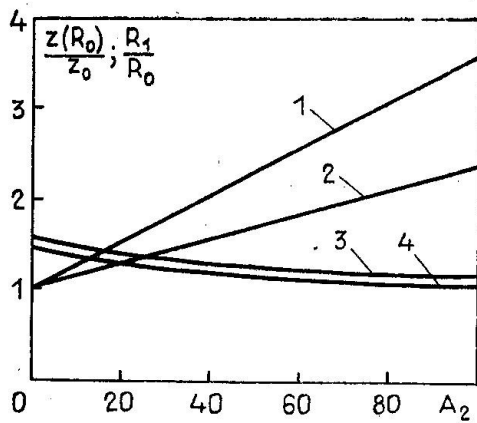


Рис. 3. Зависимости относительной высоты капли $z(R_0)/z_0$ (кривые 1, 2) и радиуса ее основания R_1/R_0 (кривые 3, 4) от параметра A_2 .

Рис. 4. Кривые намагничивания магнитных жидкостей МК-18 (плотность $\rho=1074 \text{ кг/м}^3$) и МК-23 (плотность $\rho=1143 \text{ кг/м}^3$).

проса проводилось на установке, представляющей собой прозрачную кювету, через дно которой пропущена никелевая трубка диаметром 2,6 мм. Через трубку прокачивалась термостатирующая жидкость для поддержания постоянной температуры на поверхности проводника при пропускании электрического тока. На основание проводника наносилась капля магнитной жидкости. С целью варьирования действия на каплю гравитационной силы была осуществлена частичная гидроневесомость путем заполнения кюветы прозрачным раствором с плотностью, несколько меньшей плотности магнитной жидкости. Подбор нужного раствора позволил также изменять коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела магнитная жидкость—раствор. В экспериментах были использованы водный раствор NaCl и раствор мыла в воде с плотностью $\rho=1001 \text{ кг/м}^3$. Исследования проведены на магнитной жидкости МК-18, имеющей следующие свойства: намагниченность насыщения $M^*=18 \text{ кА/м}$, магнитная восприимчивость $\chi=1,9$, плотность $\rho=1074 \text{ кг/м}^3$, коэффициент поверхностного натяжения в растворе NaCl $\sigma=1,55 \cdot 10^{-2} \text{ Н/м}$, в мыльном растворе — $\sigma=13 \cdot 10^{-4} \text{ Н/м}$. Кривая намагничивания МК-18 показана на рис. 4.

На рис. 5 приведена характерная эволюция формы капель магнитной жидкости, имеющей разные коэффициенты поверхностного натяжения,

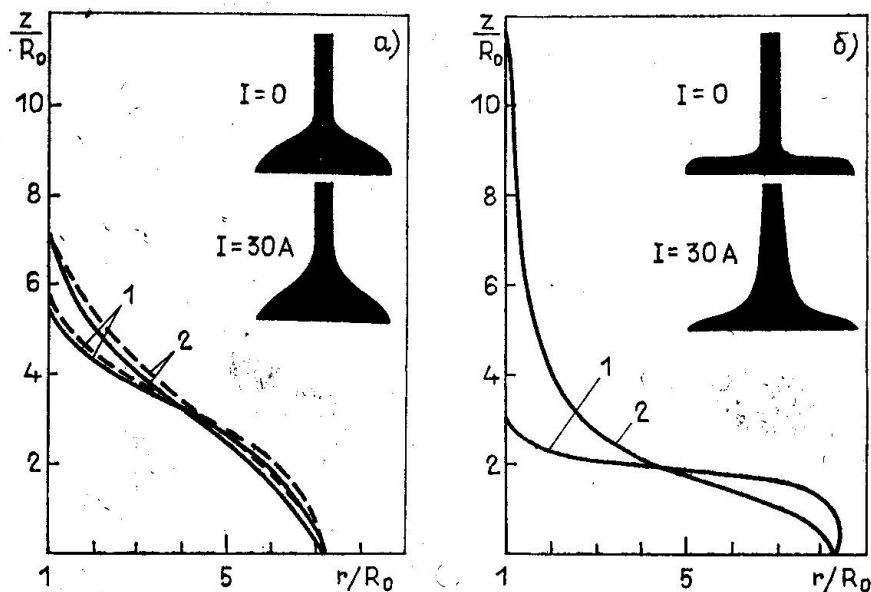
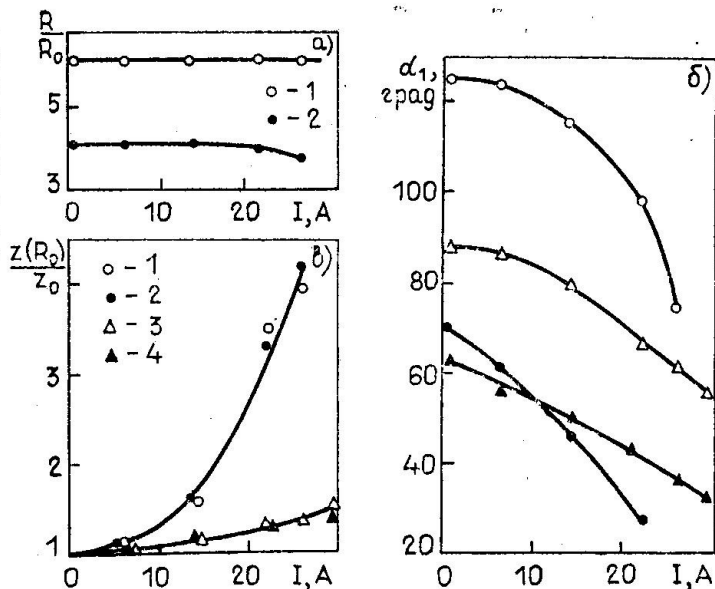


Рис. 5. Формы капли магнитной жидкости, полученные экспериментально (сплошные кривые) и теоретически (штриховые кривые). Справа вверху представлены фотографии профиля капли при двух значениях силы тока I ; а — $\sigma=1,55 \cdot 10^{-2} \text{ Н/м}$; б — $\sigma=1,3 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}$.

Рис. 6. Зависимости относительного радиуса основания капли R/R_0 (а), макрокраевого угла у основания α_1 (б), относительной высоты капли $z(R_0)/z_0$ (в) от силы тока в проводнике; 1 — $v=0,5$ см³, $\sigma=1,3 \cdot 10^{-3}$ Н/м; 2 — $v=0,1$ см³, $\sigma=1,3 \cdot 10^{-3}$ Н/м; 3 — $v=0,5$ см³, $\sigma=1,55 \cdot 10^{-2}$ Н/м; 4 — $v=0,1$ см³, $\sigma=1,55 \cdot 10^{-2}$ Н/м.



при токе в проводнике $I=30$ А и без тока. На рисунке параметры капли обезразмерены по радиусу проводника R_0 .

Видно, что форма капли определяется силой тока в проводнике. Изменение кривизны свободной поверхности — от выпуклой при $I=0$ (кривые 1) до вогнутой при $I=30$ А (кривые 2) — обусловлено перераспределением ограниченного объема жидкости. Отметим, что в представленном эксперименте пропускание тока I не вызывало перемещения границы контакта капли магнитной жидкости с плоскостью (рис. 6а). Это обусловлено процессом молекулярного взаимодействия магнитной жидкости с твердой поверхностью дна кюветы и образованием в результате этого совместной контактной пленки. Уменьшение площади контакта магнитной жидкости с плоскостью возможно в достаточно сильных магнитных полях, т. е. когда энергия магнитного поля окажется больше работы адгезии. В эксперименте перемещение границы удалось получить лишь для малого объема жидкости (рис. 6а, кривая 2).

Неподвижность границы контакта капли с плоскостью приводила к уменьшению макрокраевого угла при перераспределении объема жидкости. На рис. 6б показан характер изменения макрокраевого угла с увеличением силы тока в проводнике. Видно, что в случае малого коэффициента межфазного натяжения σ поверхность капли более подвижна. В этом случае скорость уменьшения макрокраевого угла оказалась большей (рис. 6б, кривые 1, 2), чем для жидкости с большим σ (рис. 6б, кривые 3, 4). В то же время, при одном и том же σ на скорость изменения угла α_1 влияет и объем капли, а именно, с уменьшением объема уменьшается и эта скорость.

Нужно отметить, что существуют два предельных угла смачивания: угол наступающий и угол отступающий [6]. Первый образуется при растекании жидкости по твердой поверхности, второй — когда жидкость стекает с поверхности, перемещаясь в этом случае по контактной пленке. В эксперименте магнитная жидкость с увеличением силы тока в проводнике, стремясь вытянуться вдоль него, образует с дном кюветы краевой угол, стремящийся к отступающему углу.

На рис. 6в приведена зависимость высоты капли $z(R_0)$ от силы тока в проводнике. В качестве характерного размера для z выбрана высота капли при нулевом токе. Наблюдается ярко выраженное влияние коэффициента поверхностного натяжения на вытягивание капли вдоль проводника.

3. Сравнение теоретических и экспериментальных результатов проводилось с учетом проявившейся специфики эксперимента — неподвижности границы контакта капли с плоскостью и изменением краевого угла. Чтобы численно промоделировать соответствующую ситуацию, вместо граничного условия (12) принималось $\bar{r}(1) = A_3 \bar{r}(0)$, $\bar{z}(1) = 0$, где A_3 — параметр, определяющий положение правой границы капли. На основе численного алгоритма, описанного в [5], был разработан

надлежащий модифицированный алгоритм. Запишем его, опуская для простоты черточки над безразмерными переменными:

$$\frac{z_i^{n+1} - z_i^n}{\tau} = \frac{1}{r_i^n} \left(\frac{r_{i-1}^n + r_i^n}{2} z_{s,i}^{n+1} \right)_{s,i} - \frac{Bo}{(r_0^n)^2} (z_i^{n+1} (r_{s,i}^{n+1})^{++} + z_i^n (r_{s,i}^{n+1})^{-}) + r_{s,i}^n (A_1 \varphi(r_i^n) - C^n), \quad (15)$$

$$z_{s,0}^{n+1} = \frac{1}{2} h \left(\frac{Bo}{(r_0^n)^2} z_0^{n+1} - A_1 \varphi(r_0^n) + \frac{\cos \alpha_0}{r_0^n} + C \right) \sin \alpha_0 - \cos \alpha_0, \quad (16)$$

$$z_N^{n+1} = 0, \quad i = \overline{1, N-1};$$

$$\frac{r_i^{n+1} - r_i^n}{\tau} = r_{ss,i}^{n+1} + z_{s,i}^{n+1} \left(\frac{Bo}{(r_0^n)^2} z_i^{n+1} - A_1 \varphi(r_i^n) + C^n - \frac{z_{s,i}^{n+1}}{r_i^n} \right), \quad (17)$$

$$r_0^{n+1} = (I_1^n / V)^{1/3};$$

$$r_{s,0}^{n+1} = \frac{1}{2} h \left(-A_1 \varphi(r_0^n) + \frac{Bo}{(r_0^n)^2} z_0^{n+1} + \frac{\cos \alpha_0}{r_0^n} + C^n \right) \cos \alpha_0 + \sin \alpha_0, \quad (18)$$

$$r_N^{n+1} = A_3 r_0^{n+1}, \quad i = \overline{2, N-1};$$

$$I_1^{n+1} = 2\pi h \sum_{i=1}^{N-1} z_i^{n+1} r_i^{n+1} r_{s,i}^{n+1} + \pi h \sin \alpha_0 z_0^{n+1} r_0^{n+1}, \quad (19)$$

$$I_2^{n+1} = h \sum_{i=1}^{N-1} r_i^{n+1} \varphi(r_i^{n+1}) r_{s,i}^{n+1} + \frac{1}{2} h (r_0^{n+1} \varphi(r_0^{n+1}) \sin \alpha_0 + r_N^{n+1} \varphi(r_N^{n+1}) r_{s,N}^{n+1});$$

$$C^{n+1} = \frac{1}{\eta} \frac{2}{(r_N^{n+1})^2 - (r_0^{n+1})^2} \left[r_0^{n+1} \cos \alpha_0 - r_N^{n+1} \zeta \left(\frac{z_{N-1}^{n+1}}{h} + \frac{h}{2} r_{s,N}^{n+1} A_1 \varphi(r_N^{n+1}) \right) + A_1 I_2^{n+1} - \frac{Bo}{2\pi} V r_0^{n+1} \right], \quad (20)$$

$$\eta = 1 - \frac{2}{(r_N^{n+1})^2 - (r_0^{n+1})^2} \frac{h}{2} \zeta r_{s,N}^{n+1}, \quad \zeta = \frac{1}{1 + 1/2 h r_{s,N}^{n+1} / r_N^{n+1}}.$$

Здесь τ — итерационный параметр (шаг по фиктивному времени); n — номер итерации; z_i, r_i — решение разностной задачи (15) — (20), соответствующее точному решению $z(s_i), r(s_i)$ в узлах $s_i = ih, i = \overline{0, N}$; h — шаг равномерной сетки; $y_{s,i}^- = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, y_{s,i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, y_{s,i}^+ = \frac{y_{i+1} - y_i}{h},$

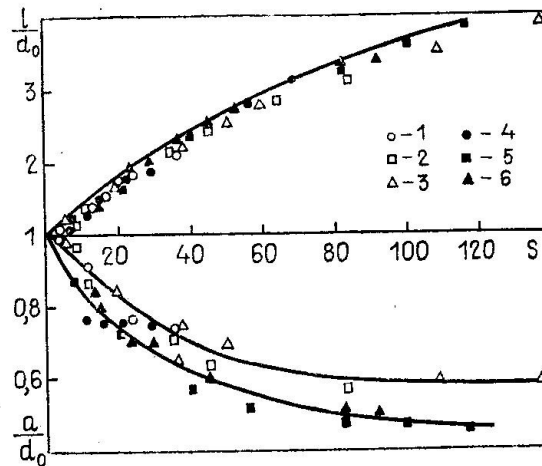
$y_{ss,i}^- = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$ — обозначения для разностных производных,

$$y^\pm = \frac{y \pm |y|}{2}.$$

Порядок вычислений на $n+1$ -й итерации заключался в следующем. Сначала прогонкой решалась задача (15), (16) и определялись z_i^{n+1} , затем аналогично находилось решение r_i^{n+1} задачи (17), (18) и, наконец, по формулам (19), (20) строились приближения $I_1^{n+1}, I_2^{n+1}, C^{n+1}$. Сетка строилась с шагом $h = 0,01$. Параметр τ выбирался так, чтобы скорость сходимости итераций была достаточно высокой.

Для ситуации, реализованной экспериментально, параметры, определяющие решение, принимают следующие значения: $V = 409,65; \alpha_0 = 0^\circ; Bo = 7,5 \cdot 10^{-2}; A_1 = 6,05; A_3 = 7,19$ для $\sigma = 1,55 \cdot 10^{-2}$ Н/м; $Bo = 0,92;$

Рис. 7. Зависимость от безразмерного комплекса S относительного удлинения l/d_0 и относительного изменения ширины a/d_0 невесомой капли магнитной жидкости различных начальных диаметров. МК-18: 1 — $d_0=2,88$ мм, 2 — $d_0=3,07$ мм, 3 — $d_0=4,45$ мм; МК-23: 4 — $d_0=1,75$ мм, 5 — $d_0=2,86$ мм, 6 — $d_0=4,38$ мм.



$A_1=72,2$; $A_3=8,84$ для $\sigma=13 \cdot 10^{-4}$ Н/м, а параметр A_2 изменяется от нуля при $I=0$ до 1,16 при $I=30$ А. Штриховые линии на рис. 5 изображают равновесные формы, полученные численно по алгоритму (15) — (20). Достаточно точное совпадение результатов свидетельствует об адекватности численного решения задачи и данных эксперимента.

В заключение хотелось бы отметить, что хорошей моделью для сравнения теоретических и экспериментальных результатов является также капля магнитной жидкости в условиях гидроневесомости в однородном магнитном поле, исследованная экспериментально в работе [7] и теоретически — в [8]. Проведенные нами более тщательные эксперименты, особенно в части определения физических свойств жидкости, таких как коэффициент поверхностного натяжения, показывают хорошее согласие теории и эксперимента. На рис. 7 сплошной линией в верхней половине рисунка изображена зависимость относительного удлинения капли вдоль поля l/d_0 (l — длина капли в поле, d_0 — начальный диаметр ее) от введенного в [7] безразмерного комплекса $S = \mu_0 M^2 d_0 / \sigma$, взятая из [8]. Точками нанесены данные эксперимента для разных жидкостей МК-18 и МК-23, коэффициент поверхностного натяжения которых составлял соответственно $1,18 \cdot 10^{-2}$ и $1,2 \cdot 10^{-2}$ Н/м, и различных начальных диаметров капель. В нижней части этого рисунка представлены экспериментальные результаты по относительному изменению ширины капли (a — размер капли в поперечном поле направления), которые демонстрируют определенную зависимость ее от намагниченности жидкости, что не было так выражено для продольного размера l/d_0 . Этот факт требует более детального теоретического и экспериментального изучения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Neuringer J. L., Rosensweig R. E. Ferrohydrodynamics. — Phys. Fluids, 1964, vol. 7, N 12, p. 1927—1937.
2. Берковский Б. М., Орлов Л. П. К исследованию формы свободной поверхности и аналога пинч-эффекта в намагничивающихся жидкостях. — Магнитная гидродинамика, 1973, № 4, с. 38—44.
3. Архипенко В. И., Барков Ю. Д., Баштовой В. Г. Некоторые особенности поведения капли намагничивающейся жидкости в магнитных полях. — Магнитная гидродинамика, 1980, № 3, с. 3—10.
4. Полевиков В. К. Об одном подходе к исследованию устойчивости равновесных форм магнитной жидкости. — В кн.: Материалы III Всесоюзной школы-семинара по магнитным жидкостям. М.: Изд-во МГУ, 1983, с. 196—197.
5. Полевиков В. К., Будник А. М. Численное исследование формы капли магнитной жидкости в магнитном поле вертикального проводника с током. — В кн.: Магнитные жидкости: научные и прикладные исследования. Минск: ИТМО им. А. В. Лыкова АН БССР, 1983, с. 37—47.
6. Дерягин Б. В. О зависимости краевого угла от микрорельефа или шероховатости смачиваемой поверхности. — Доклады АН СССР, 1946, т. 51, № 5, с. 357—360.
7. Архипенко В. И., Барков Ю. Д., Баштовой В. Г. Исследование формы капли намагничивающейся жидкости в однородном магнитном поле. — Магнитная гидродинамика, 1978, № 3, с. 131—134.
8. Блум Э. Я., Михайлов Ю. А., Озолс Р. Я. Тепло- и массообмен в магнитном поле. Рига: Зинатне, 1980. 354 с.

Поступила 13 сентября 1983 г.