ВЕСТНИК БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
им. В. И. ЛЕНИНА. СЕРИЯ I, 1972, № 2

УДК 517.926.7

О. А. КАСТРИЦА

О ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ НОРМЫ

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x, \ t \in [a, \ b], \tag{1}$$

где x — $n \times 1$ вектор;
$A(t) = [a_{kl}(t)]$ — $n \times n$ матрица;
$a_{kl}(t)$ — непрерывные функции от t.

Считаем, что $A(t)$ такова, что собственные значения матрицы $B(t) = \frac{1}{2}[A + A^*]$ $\lambda_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$ различны при всех $t \in [a, \beta], \beta \leqslant b$. Соответствующие собственные векторы матрицы $B(t)$ обозначим $u_i(t)$ $i = 1, \ldots, n$. Собственные векторы матрицы $B'(t)$ обозначим $v_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$.

Если определить норму матрицы $A(t)$ как

$$\|A(t)\| = \sqrt{\Lambda_0(t)}, \tag{2}$$

где $\Lambda_0(t)$ — наибольшее собственное число матрицы $A^*(t) \cdot A(t)$, то соответствующая логарифмическая норма [1] будет

$$\gamma(A(t)) = \Lambda(t), \tag{3}$$

где $\Lambda(t)$ — наибольшее собственное значение матрицы $B(t)$; $A^*(t)$ — сопряженная матрица.

В работе [1] было показано, что для матриканта [2] системы (1) справедлива оценка

$$\|\overset{t}{\underset{a}{\Omega}} A\| \leqslant e^{\int\limits_a^t \gamma(A(u))\,du}, \ t \in [a, \ b]. \tag{4}$$

Если изменять элементы матрицы $A(t)$ некоторыми добавками $\delta a_{kl}(t)$, будет меняться и оценка (4), поскольку $\gamma(A(u))$ меняется. Считая

$$\sum_{k, \ l=1}^{n} |\delta a_{kl}(t)| \leqslant \varepsilon \tag{5}$$

можно определить коэффициенты чувствительности логарифмической нормы $\gamma(A(u))$.

Как было показано в [3], для постоянной матрицы $C = [c_{kl}]$ с различными собственными значениями μ_i, $i = 1, \ldots, n$, справедливо следующее:

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial C_{kl}} = z_i^k y_i^l, \tag{6}$$

где y_i^l — l-я компонента собственного вектора y_i матрицы C, соответствующего собственному значению μ_i;

z_i^k — k-я компонента собственного вектора z_i матрицы C', соответствующего собственному значению μ_i.

Можно использовать это для выяснения того, как меняется $\gamma(A(t))$ при изменении элементов матрицы $A(t)$. Для этого рассмотрим выражения

$$\frac{\partial \gamma(A(t))}{\partial \operatorname{Re} a_{kl}(t)} \text{ и } \frac{\partial \gamma(A(t))}{\partial \operatorname{Im} a_{kl}(t)}, \tag{7}$$

которые назовем коэффициентами чувствительности логарифмической нормы.

Предварительно покажем, что для эрмитовой матрицы $B(t)$ справедливо

Предложение.

$$v_i = \overline{u}_i. \tag{8}$$

В самом деле, $Bu_i = \lambda_i u_i$. Но $B = B^*$. Поэтому $B^* u_i = \lambda_i u_i$. Отсюда $B'\overline{u_i} = \lambda_i \overline{u}_i$.

Перейдем к нахождению коэффициентов (7). Так как $B = [b_{ij}(t)] = = \frac{1}{2}[a_{ij}(t) + \overline{a}_{ji}(t)]$, то при изменении элемента $a_{kl}(t)$ матрицы $A(t)$ меняются элементы $b_{kl}(t)$ и $b_{lk}(t)$ матрицы $B(t)$. Поэтому, учитывая (3), (6) и (8), имеем

$$\frac{\partial \gamma(A(t))}{\partial \operatorname{Re} a_{kl}(t)} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \Lambda(t)}{\partial b_{ij}(t)} \cdot \frac{\partial b_{ij}(t)}{\partial \operatorname{Re} a_{kl}(t)} = \frac{\partial \Lambda(t)}{\partial b_{kl}(t)} \cdot \frac{\partial b_{kl}(t)}{\partial \operatorname{Re} a_{kl}(t)} +$$

$$+ \frac{\partial \Lambda(t)}{\partial b_{lk}(t)} \cdot \frac{\partial b_{lk}(t)}{\partial \operatorname{Re} a_{kl}(t)} = \frac{1}{2}(\overline{u}_\Lambda^k u_\Lambda^l + \overline{u}_\Lambda^l u_\Lambda^k) = \operatorname{Re}\{\overline{u}_\Lambda^k u_\Lambda^l\}; \tag{9}$$

$$\frac{\partial \gamma(A(t))}{\partial \operatorname{Im} a_{kl}(t)} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \Lambda(t)}{\partial b_{ij}(t)} \cdot \frac{\partial b_{ij}(t)}{\partial \operatorname{Im} a_{kl}(t)} = \frac{\partial \Lambda(t)}{\partial b_{kl}(t)} \cdot \frac{\partial b_{kl}(t)}{\partial \operatorname{Im} a_{kl}(t)} +$$

$$+ \frac{\partial \Lambda(t)}{\partial b_{lk}(t)} \cdot \frac{\partial b_{lk}(t)}{\partial \operatorname{Im} a_{kl}(t)} = \frac{1}{2}(\overline{u}_\Lambda^k u_\Lambda^l - \overline{u}_\Lambda^l u_\Lambda^k) = \operatorname{Im}\{\overline{u}_\Lambda^k u_\Lambda^l\}, \tag{10}$$

где u_Λ — собственный вектор матрицы $B(t)$, соответствующий собственному значению Λ. Заметим, что

$$\delta \operatorname{Re} a_{kl}(t) = \operatorname{Re} \delta a_{kl}(t); \ \delta \operatorname{Im} a_{kl}(t) = \operatorname{Im} \delta a_{kl}(t). \tag{11}$$

Поскольку $b_{lk}(t) = \frac{1}{2}[a_{kl} + \overline{a}_{lk}]$, то функция $\gamma(A(t))$, рассматриваемая как функция комплексного аргумента a_{kl}, не дифференцируема. Если же рассматривать $\gamma(A(t))$ как функцию аргументов $\operatorname{Re} a_{kl}(t)$, $\operatorname{Im} a_{kl}(t)$, то, учитывая (11) и то, что частные производные (9) и (10) представляют собой непрерывные функции $\operatorname{Re} a_{kl}(t)$, $\operatorname{Im} a_{kl}(t)$, можно написать

$$\Delta\gamma(A(t)) = \sum_{k,l=1}^{n} \left[\frac{\partial \gamma(A(t))}{\partial \operatorname{Re} a_{kl}(t)} \cdot \operatorname{Re} \delta a_{kl}(t) + \frac{\partial \gamma(A(t))}{\partial \operatorname{Im} a_{kl}(t)} \cdot \operatorname{Im} \delta a_{kl}(t) \right] +$$

$$+ 0(|\delta a_{kl}(t)|). \tag{12}$$

Если $m = \max\limits_{k,l} \max \{|\operatorname{Re} \overline{u}_\Lambda^k u_\Lambda^l|, |\operatorname{Im} \overline{u}_\Lambda^k u_\Lambda^l|\} = |\operatorname{Re} \overline{u}_\Lambda^p u_\Lambda^q|$, $a \leqslant t < t_0 \leqslant \beta$, то, возмутив элемент a_{pq} добавкой $\delta a_{pq}(t) \equiv \pm\varepsilon$, $\delta a_{ij}(t) = 0, i \neq p, j \neq q$, получим наибольшее по абсолютной величине изменение $\gamma(A(t))$ среди всех изменений, даваемых добавками (5).

Если $m = |\operatorname{Im} \bar{u}_\Lambda^p u_\Lambda^q|$, $a \leqslant t < t_0 \leqslant \beta$, то наибольшее по абсолютной величине изменение $\gamma(A(t))$ получится добавкой $\delta a_{pq}(t) \equiv \pm i\varepsilon$, $\delta_{ij} = 0$, $i \neq p$, $j \neq q$. Выбрав соответствующий знак добавки, можно добиться уменьшения $\gamma(A(t))$, наибольшего в классе возмущений (5). В силу (4) матрицант системы, имеющей матрицу A с такой добавкой, будет лежать в области, более узкой по сравнению с соответствующей областью системы (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лозинский С. М. «Изв. вузов СССР» — Математика, № 5, 52—90, 1958.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., «Наука», 1967.
3. Crossley T. R. and Porter B. Int. J. Control, **10**, № 2, 163—170, 1969.

Поступила в редакцию
13/I 1972 г.

БГУ им. В. И. Ленина,
кафедра высшей математики
и математической физики