ВЕСТНИК БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
им. В. И. ЛЕНИНА. СЕРИЯ I, 1973, № 1

УДК 517.926.4

О. А. КАСТРИЦА

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ МАТРИЦАНТА ДВУМЕРНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ

Матрицантом стационарной системы является матрица $e^{At}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!}$ [1]. Обозначим элементы e^{At} через a_{kl}, k, $l=1,2,\ldots,n$. Сопостав м каждой вещественной $n\times n$-матрице A некоторый элемент множества индексов

$$P=\{(k,l):k,l=1,\ldots,n\}$$

по следующему закону:

$$A\to(i,j),\ \text{если}\ |a_{ij}|\geqslant|a_{kl}|,\ (k,l)\neq(i,j). \tag{1}$$

Если $|a_{ij}|=|a_{ps}|\geqslant|a_{kl}|$, $(i,j)\neq(k,l)\neq(p,s)$, выбираем один какой-нибудь элемент (i,j) или (p,s). Соотношение (1), таким образом, задает оператор $f(A)$ на множестве квадратных вещественных $n\times n$-матриц со значениями на множестве P. В данной заметке изучается поведение $f(A)$ при изменении t и элементов 2×2-матрицы $A=\begin{bmatrix}a, & b\\ c, & d\end{bmatrix}$.

I. Пусть $\lambda_1>\lambda_2$ — вещественные собственные значения матрицы A. Используя матрицу S, приводящую A к жордановой форме [2], легко вычислить

$$e^{At}=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{bmatrix}(\lambda_1-a)e^{\lambda_2 t}-(\lambda_2-a)e^{\lambda_1 t} & b(e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t})\\ c(e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}) & (\lambda_1-a)e^{\lambda_1 t}-(\lambda_2-a)e^{\lambda_2 t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}. \tag{2}$$

Сравнивая элементы e^{At}, получаем:

а) $f(A)=(2,2)$ при любом t, если $|\lambda_2-a|\leqslant|b|\leqslant|\lambda_1-a|$; (3)
б) $f(A)=(1,1)$ при любом t, если $|\lambda_2-a|\geqslant|b|\geqslant|\lambda_1-a|$;
в) если $|\lambda_1-a|\leqslant|b|$; $|\lambda_2-a|\leqslant|b|$, то появляется зависимость функционала f от t, а именно: при фиксированной матрице A значение $f(A)$ меняется при некотором $t=t_0\geqslant0$.

Обозначим

$$\max\{|\lambda_1-a|,\ |\lambda_2-a|\}=M;\qquad \min\{|\lambda_1-a|,\ |\lambda_2-a|\}=m. \tag{4}$$

Тогда

$$t_0=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\ln\frac{|b|+m}{|b|-M},\ \text{если}\ (\lambda_1-a)(\lambda_2-a)\leqslant0; \tag{5}$$

$$t_0=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\ln\frac{|b|-m}{|b|-M},\ \text{если}\ (\lambda_1-a)(\lambda_2-a)>0.$$

При $|\lambda_1-a|\geqslant|\lambda_2-a|$.

$$f(A)=\begin{cases}(2,2), & \text{если}\ t\leqslant t_0;\\ (1,2), & \text{если}\ t>t_0.\end{cases} \tag{6}$$

Если $|\lambda_1 - a| < |\lambda_2 - a|$, то

$$f(A) = \begin{cases} (1,1), & \text{если } t \leqslant t_0; \\ (1,2), & \text{если } t > t_0; \end{cases} \tag{7}$$

г) если $|\lambda_1 - a| > |b|$; $|\lambda_2 - a| > |b|$, то в (5) надо заменить b на c, а в (6) и (7) элемент (1, 2) на (2, 1).

II. Пусть $\lambda_1 = \lambda_2$, элементарный делитель кратный. Тогда, используя [2], получаем

$$e^{At} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 - (\lambda - a)t & bt \\ ct & 1 + (\lambda - a)t \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Обозначим

$$t_0 = [\max\{|b|, |c|\} + |\lambda - a|]^{-1}. \tag{9}$$

Пусть $|b| \geqslant |c|$. Тогда, если $d \geqslant a$, то

$$f(A) = \begin{cases} (1,2), & \text{если } t \geqslant t_0; \\ (2,2), & \text{если } t < t_0. \end{cases} \tag{10}$$

Если же $d < a$, то

$$f(A) = \begin{cases} (1,2), & \text{если } t \geqslant t_0; \\ (1,1), & \text{если } t < t_0. \end{cases} \tag{11}$$

В случае $|c| < |b|$ надо в (10) и (11) вместо (1, 2) писать (2, 1).

III. Элементарный делитель кратный. Тогда, для определенности, $f(A) = (1,1)$.

IV. Собственные значения матрицы A комплексные. Для определенности будем обозначать λ то собственное значение, у которого $\operatorname{Im}\lambda < 0$. Матрица e^{At} получается из (2), если там взять $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \bar{\lambda}$. Сравнивая элементы a_{11} и a_{22}, приходим к соотношению

$$\left|1 - \frac{\bar{\lambda} - a}{\lambda - a} e^{(\bar{\lambda} - \lambda)t}\right| \gtreqless \left|1 - \frac{\bar{\lambda} - a}{\lambda - a} e^{(\lambda - \bar{\lambda})t}\right|. \tag{12}$$

Воспользуемся экспоненциальной формой комплексных чисел [3] и обозначим

$$-2t \operatorname{Im}\lambda = \varphi_0, \; 2\arg(\lambda - a) = \varphi, \; 0 \leqslant \varphi < 2\pi. \tag{13}$$

Тогда (12) примет вид

$$|1 - e^{(\varphi + \varphi_0)i}| \gtreqless |1 - e^{(\varphi - \varphi_0)i}|. \tag{14}$$

Это означает, что надо сравнить расстояния от точки (1, 0) комплексной плоскости до двух точек, расположенных на единичной окружности с центром в начале координат. Возможны следующие случаи:

а) $0 \leqslant \varphi < \pi$; 1. $2k\pi \leqslant \varphi_0 < (2k+1)\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Тогда

$$|a_{22}| \geqslant |a_{11}|. \tag{15}$$

2. $(2k+1)\pi \leqslant \varphi_0 < (2k+2)\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Тогда

$$|a_{11}| \geqslant |a_{22}|. \tag{16}$$

б) $\pi \leqslant \varphi < 2\pi$; 1. $2k\pi \leqslant \varphi_0 < (2k+1)\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Тогда

$$|a_{11}| \geqslant |a_{22}|. \tag{17}$$

2. $(2k+1)\pi \leqslant \varphi_0 < (2k+2)\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Тогда

$$|a_{22}| \geqslant |a_{11}|. \tag{18}$$

Нетрудно заметить, что условие $\varphi < \pi$ эквивалентно условию $a < d$. В самом деле, если $\varphi < \pi$, то из (13) следует, что $\arg(\lambda - a) < \frac{\pi}{2}$, т. е. $Re(\lambda - a) = \frac{d-a}{2} > 0$. И наоборот. Аналогично доказывается эквивалентность условий $\varphi \geqslant \pi$ и $a \geqslant d$.

Пусть $|a_{11}| > |a_{22}|$ и $|b| \geqslant |c|$. Сравнивая $|a_{11}|$ и $|a_{12}|$ и используя (13), получаем соотношение

$$\frac{|\lambda - a|}{|b|}\left|\cos\frac{\varphi}{2} - \operatorname{ctg}\frac{\varphi_0}{2}\cdot\sin\frac{\varphi}{2}\right| \gtrless 1. \tag{19}$$

Отсюда получаем

$$\frac{\varphi_0}{2} \gtrless \operatorname{arc\,ctg}\left[\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} - \frac{|b|}{|\lambda - a|\sin|\varphi/2}\right] + k\pi \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_1 + k\pi, \tag{20}$$

$$\text{если } \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} \geqslant \operatorname{ctg}\frac{\varphi_0}{2};$$

$$\frac{\varphi_0}{2} \gtrless \operatorname{arc\,ctg}\left[\operatorname{ctg}\varphi/2 + \frac{|b|}{|\lambda - a|\sin\varphi/2}\right] + k\pi \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_2 + k\pi, \tag{21}$$

если $\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} \leqslant \operatorname{ctg}\frac{\varphi_0}{2}$; $k = 0, 1, 2, \ldots$. Сравним φ_1 и φ_2. Так как

$$\frac{|b|}{|\lambda - a|} \geqslant 1 \geqslant \cos\frac{\varphi}{2}, \text{ то } \left[\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} - \frac{|b|}{|\lambda - a|\sin\frac{\varphi}{2}}\right] \leqslant 0$$

и поэтому

$$\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi_1 \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi_2 \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{22}$$

Используя это, получаем

$$|a_{12}| \geqslant |a_{11}|, \text{ если } k\pi + \varphi_2 \leqslant \frac{\varphi_0}{2} \leqslant k\pi + \varphi_1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{23}$$

Рассуждая аналогично, сравним $|a_{12}|$ и $|a_{22}|$. Оказывается, что

$$|a_{12}| \geqslant |a_{22}|, \quad \text{если} \quad k\pi + \varphi_3 \leqslant \frac{\varphi_0}{2} \leqslant k\pi + \varphi_4, \; k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{24}$$

где

$$\varphi_3 = \operatorname{arc\,ctg}\left[-\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} + \frac{|b|}{|\lambda - a|\sin\frac{\varphi}{2}}\right]; \; 0 \leqslant \varphi_3 \leqslant \frac{\pi}{2}, \tag{25}$$

$$\varphi_4 = \operatorname{arc\,ctg}\left[-\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} - \frac{|b|}{|\lambda - a|\sin\frac{\varphi}{2}}\right], \quad \frac{\pi}{2} \leqslant \varphi_4 \leqslant \pi. \tag{26}$$

Если $|b| < |c|$, то, очевидно, $|a_{12}| < |a_{21}|$ и надо сравнивать $|a_{21}|$ с $|a_{11}|$ и $|a_{22}|$. Получим значения углов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, которые вычисляются по формулам (20), (21), (25) и (26) заменой b на c.

Теперь, приняв во внимание (15)—(18), (23) и (24), можно изучить поведение оператора $f(A)$ при изменении A (или при изменении t при фиксированной матрице A).

Пусть A фиксирована. Для определенности считаем $|b| > |c|$. При изменении t на $[0, +\infty)$ величина $-2t\operatorname{Im}\lambda$ также пробегает полуось $[0, +\infty)$. При этом оператор $f(A)$ будет изменяться следующим образом: если $a \geqslant d$, то

$$f(A) = \begin{cases} (1,\ 1), \text{ если } 2k\pi \leqslant -2t\operatorname{Im}\lambda < \varphi_2 + 2k\pi \\ (1,\ 2), \text{ если } \varphi_2 + 2k\pi \leqslant -2t\operatorname{Im}\lambda < \varphi_1 + 2k\pi \\ (1,\ 1), \text{ если } \varphi_1 + 2k\pi \leqslant -2t\operatorname{Im}\lambda < (2k+1)\pi \\ (2,\ 2), \text{ если } (2k+1)\pi \leqslant -2t\operatorname{Im}\lambda < \varphi_4 + (2k+1)\pi \\ (1,\ 2), \text{ если } \varphi_4 + (2k+1)\pi \leqslant -2t\operatorname{Im}\lambda < \varphi_3 + (2k+1)\pi \\ (2,\ 2), \text{ если } \varphi_3 + (2k+1)\pi \leqslant -2t\operatorname{Im}\lambda < (2k+2)\pi, \end{cases} \tag{27}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Если же $a < d$, то

$$f(A) = \begin{cases} (2,\ 2), \text{ если } 2k\pi \leqslant -2t \operatorname{Im}\lambda < \varphi_4 + 2k\pi \\ (1,\ 2), \text{ если } \varphi_4 + 2k\pi \leqslant -2t \operatorname{Im}\lambda < \varphi_3 + 2k\pi \\ (2,\ 2), \text{ если } \varphi_3 + 2k\pi \leqslant -2t \operatorname{Im}\lambda < (2k+1)\pi \\ (1,\ 1), \text{ если } (2k+1)\pi \leqslant -2t \operatorname{Im}\lambda < \varphi_2 + (2k+1)\pi \\ (1,\ 2), \text{ если } \varphi_2 + (2k+1)\pi \leqslant -2t \operatorname{Im}\lambda < \varphi_1 + (2k+1)\pi \\ (1,\ 1), \text{ если } \varphi_1 + (2k+1)\pi \leqslant -2t \operatorname{Im}\lambda < (2k+2)\pi, \end{cases} \tag{28}$$

$$k = 0,\ 1,\ 2, \ldots,$$

Примечание. Если $|b| < |c|$, то в формулах (27) и (28) следует заменить элемент (1, 2) на (2, 1) и φ_i на $\overline{\varphi}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Можно рассматривать поведение $f(A)$ и при изменении матрицы A. Пусть, например, элемент b пробегает $(-\infty, +\infty)$. Остальные элементы для простоты считаем фиксированными. Тогда собственные значения матрицы A пробегают, во-первых, весь промежуток $(-\infty, +\infty)$, и тогда справедливы случаи I, II или III, и, во-вторых, $\operatorname{Im}\overline{\lambda}$ пробегает промежуток $(0, +\infty)$, а тогда верен случай IV. При этом моменты перехода, определяемые величинами $\varphi_i + k\pi$ (или $\overline{\varphi}_i + k\pi$), будут меняться, оставаясь, однако, в границах неравенств (22), (25), (26).

Замечание. Пользуясь случаем, внесем исправления в [2]. В выражении (17) при вычислении потерян множитель $\frac{|c|}{|\lambda - a|}$. Поэтому величины m_0 в (17) и $\overset{*}{m}_0$ в (25) надо умножить на $\frac{|c|}{|\lambda - a|}$, а в (27), (28), (31) и (32) заменить b на $\|\lambda E - A\|$.

В заключение благодарю Ю. С. Богданова за постановку задачи и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Еругин Н. П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, 1963.

2. Кастрица О. А. «Вестн. Белорусского ун-та», № 1, 3—7, 1972.

3. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций, т. 1. М., «Наука», 1967.

Поступила в редакцию
28/II 1972 г.

БГУ им. В. И. Ленина,
кафедра высшей математики