ДЕКАБРЬ 1973 г., ТОМ IX, № 12

УДК 517.926 4

СТРУКТУРА МАТРИЦ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЛИНЕЙНЫХ СФЕРИЧЕСКИ СОВМЕСТНЫХ СИСТЕМ

О. А. КАСТРИЦА

В $(n+1)$-мерном действительном евклидовом пространстве R^{n+1} выделим полупространство $R_+^{n+1}=\{(\tau, \xi) : \tau \geqslant 0, \xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)\}$. Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$dx/d\tau = P(\tau)\, x, \tag{1}$$

матрица коэффициентов которой $P(\tau) = [p_{ij}(\tau)]$ размерности $n\times n$ задана для почти всех $\tau \geqslant 0$ и суммируема на любом сегменте $[\tau, T]$. Решением $x = x(\tau)$ будем называть абсолютно непрерывную вектор-функцию $x(\tau)$, производная которой, существующая почти всюду, почти всюду удовлетворяет (1). При любых начальных данных решение существует, единственно и продолжимо на $[0, +\infty)$ [1, стр. 53—73]. Пользуясь известными методами (см., например, [2]), можно записать уравнение в частных производных первого порядка, соответствующее системе (1),

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_j} \sum_{i=1}^{n} p_{ji} x_i + \frac{\partial v}{\partial \tau} = 0, \tag{2}$$

где $v = v(x_1, \ldots, x_n, \tau)$ — неизвестная функция, непрерывно дифференцируемая по x и абсолютно непрерывная по τ, производные которой почти всюду удовлетворяют (2). Предположим, что в R_+^{n+1} задана поверхность

$$(x, Ax) - 1 = 0, \tag{3}$$

где $A = A(\tau)$ — симметрическая положительно определенная [3, стр. 65] матрица, элементы которой — абсолютно непрерывные функции. (Здесь (a, b) — скалярное произведение векторов a и b). Зададимся целью определить все уравнения (2) (а тем самым и все системы (1)), для которых поверхность (3) является решением (интегральной конфигурацией [4]). Обозначим i-й столбец единичной матрицы e_i; z^T — транспонированный вектор z. Тогда из (3), используя свойства скалярного произведения, получим

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = (e_i, Ax) + (x, Ae_i) = (A^T e_i, x) + (x, Ae_i) = 2(x, Ae_i) = 2x^T Ae_i; \tag{4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = (x, \dot{A}x) = x^T \dot{A}x. \tag{5}$$

Заметим также, что

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ki} x_i = e_k^T Px. \tag{6}$$

Подставив (4) — (6) в (2), получим $\sum\limits_{j=1}^{n} 2x^T Ae_j e_j^T Px + x^T \dot{A}x = 0$ или $x^T [2AP + \dot{A}]\, x = 0$.

Отсюда

$$(x, [2AP + \dot{A}]\, x) = 0. \tag{7}$$

Итак, доказана

Т е о р е м а 1. *Для того чтобы поверхность (3) была интегральной конфигурацией системы (1), необходимо и достаточно, чтобы матрица $U = 2AP + \dot{A}$ удовлетворяла соотношению*

$$(x, Ux) = 0 \tag{8}$$

для любого вектора x.

Предположим теперь, что поверхность (3) является интегральной трубкой системы

$$dy/d\tau = Q(\tau)\,y. \tag{9}$$

Тогда, как показано в [4], $A = [Y^{-1}]^T Y^{-1}$, где Y — нормированная в нуле фундаментальная матрица (9). Причем, $[Y^{-1}]^T Y^{-1} = [Y^{-1}]^T S^T S Y^{-1}$ для любой ортогональной матрицы $S(\tau)$. Мы будем предполагать, что $S(\tau)$ абсолютно непрерывная. Тогда $v(x_1, \ldots, x_n, \tau) = (SY^{-1}x,\ SY^{-1}x) - 1$. Дифференцируем по τ и, используя свойства скалярного произведения, а также то, что $\dot{Y} = QY$, получаем

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = (\dot{S}Y^{-1}x,\ SY^{-1}x) - (SY^{-1}\dot{Y}Y^{-1}x,\ SY^{-1}x) + (SY^{-1}x,\ \dot{S}Y^{-1}x) -$$

$$- (SY^{-1}x,\ SY^{-1}\dot{Y}Y^{-1}x) = 2x^T([Y^{-1}]^T S^T \dot{S} Y^{-1} - [Y^{-1}]^T Y^{-1}Q)\,x. \tag{10}$$

Подставив (4), (6) и (10) в (2), получим

$$2\,(x,\ ([Y^{-1}]^T Y^{-1}P + [Y^{-1}]^T S^T \dot{S} Y^{-1} - [Y^{-1}]^T Y^{-1}Q)\,x) = 0$$

или

$$P = Q - YS^T\dot{S}Y^{-1} + YY^T U,$$

где U — матрица, удовлетворяющая (8).

Поскольку $d[SS^T]/d\tau = \dot{S}S^T + S\dot{S}^T = 0$ и матрица S произвольная ортогональная, то, обозначив S^T снова через S, это соотношение можно записать в виде, более удобном для дальнейшего использования

$$P = Q + Y\dot{S}S^T Y^{-1} + YY^T U. \tag{11}$$

Если провести рассуждения в обратном порядке, то можно без труда убедиться, что поверхность (3) с матрицей $A = [Y^{-1}]^T Y^{-1}$ является интегральной трубкой для системы (1) с матрицей (11), т. е. справедлива

Теорема 2. *Множество матриц систем, сферически совместных с системой (9), образует класс*

$$K = \{P : P = Q + Y\dot{S}S^T Y^{-1} + YY^T U\}.$$

Теорема 3. *Для любой матрицы $U(\tau)$, удовлетворяющей (8), и абсолютно непрерывной ортогональной матрицы $S(\tau)$ существует абсолютно непрерывная ортогональная матрица $Z(\tau)$, $Z(0) = I$ такая, что*

$$Y\dot{S}S^T Y^{-1} + YY^T U = Y\dot{Z}Z^T Y^{-1}. \tag{12}$$

Доказательство. Из (12) $\dot{Z}Z^T = \dot{S}S^T + Y^T UY \overset{\text{def}}{=} B$. Обозначим $\mathcal{U} = \{U : (x, Ux) = 0,\ \forall x\}$. Очевидно, $B \in \mathcal{U}$. В самом деле, $U \in \mathcal{U}$ (а, значит, и $Y^T UY \in \mathcal{U}$), $\dot{S}S^T \in \mathcal{U}$. Поэтому $B \in \mathcal{U}$.

Лемма. *Утверждения 1) $U \in \mathcal{U}$; 2) $U^T = -U$ эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $U \in \mathcal{U}$, $U = (u_{ij})$. Возьмем в (8) вектор $x = x^{ij} = e_j + e_i$. Тогда из (8) $u_{ij} + u_{ji} = 0$, $i, j = 1, \ldots, n$, т. е. $U^T = -U$.

Обратно, если U кососимметрическая, то для любого x $(x, Ux) = (U^T x,\ x) = -(Ux, x) = -(x, Ux)$. Значит, $(x, Ux) = 0$, т. е. $U \in \mathcal{U}$. Лемма доказана.

Завершим теперь доказательство теоремы 3. Покажем, что любая матрица $B \in \mathcal{U}$ представима в виде

$$B = \dot{Z}Z^T, \tag{13}$$

где $Z(\tau)$ — ортогональная, $Z(0) = I$. Действительно, достаточно взять в качестве матрицы $Z(\tau)$ нормированную в нуле фундаментальную матрицу системы

$$dz/d\tau = Bz. \tag{14}$$

Легко убедиться, что $Z^{-1}(\tau) = Z^T(\tau)$. Теорема доказана.

В заключение отметим, что теорема 3 устанавливает эквивалентность новых условий сферической совместности двух линейных дифференциальных систем условиям, полученным ранее [4].

Благодарю Ю. С. Богданова, под руководством которого написана эта работа.

Литература

1. Коддингтон Э., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1958.
2. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1967.
3. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М., 1969.
4. Кастрица О. А., Петровский Г. Н. Дифференц. уравнения, 9, № 6, 1973.

Поступила в редакцию
13 марта 1973 г.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина