О. А. КАСТРИЦА

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ ВОЗМУЩЕНИИ ФУНКЦИОНАЛА, ОПРЕДЕЛЕННОГО НА СПЕКТРЕ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

Пусть $\mathbf{M}$ — множество всех симметрических положительно определенных $n \times n$-матриц и

$$\dot{x} = Px \qquad (1)$$

— линейная n-мерная асимптотически устойчивая стационарная система. Как известно [1. С. 34], при любой матрице $C \in \mathbf{M}$ уравнение

$$P^T A + AP = -C \tag{2}$$

определяет единственным образом посредством матрицы $A \in \mathbf{M}$ функцию Ляпунова $v(x) = x^T A x$. Для оценки решений системы (1) используется функционал φ: $A \mapsto \varphi(A) = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ (см., например, [2. С. 73]), где $\lambda_{\max}$ и $\lambda_{\min}$ — экстремальные собственные значения матрицы A. В [3] рассматривалась задача о максимальном отклонении $\varphi(A)$ при малых возмущениях матрицы A и были указаны способы построения реализующих такие отклонения добавок к матрице A при различных способах задания матричной нормы.

Рассмотрим теперь задачу о влиянии матрицы $C \in \mathbf{M}$ на величину $\varphi(A)$. Обозначим $\mathbf{B}$ множество симметричных матриц B таких, что $\|B\| \leqslant \varepsilon$ и $C + B \in \mathbf{M}$. Будем полагать дальше, что матрица A имеет собственные значения $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$. Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — соответствующие им собственные векторы такие, что $u_i^T u_i = 1$. Изменение матрицы C вызывает, в силу (2), изменение собственных значений λ_k, $k = 1, \ldots, n$. Зависимость λ_k от C характеризуется матрицей чувствительности $\rho^k = [\rho_{ij}^k]$, где $\rho_{ij}^k = \partial\lambda_k/\partial c_{ij}$ — коэффициент чувствительности собственного значения λ_k к изменению элемента c_{ij} матрицы C. Дифференцируя по c_{ij} соотношение $Au_k = \lambda_k u_k$, получаем

$$\frac{\partial A}{\partial c_{ij}} u_k + A \frac{\partial u_k}{\partial c_{ij}} = \rho_{ij}^k u_k + \lambda_k \frac{\partial u_k}{\partial c_{ij}}. \tag{3}$$

Умножая (3) слева на u_k^T и учитывая, что $A^T = A$, будем иметь $u_k^T \frac{\partial A}{\partial c_{ij}} u_k - \rho_{ij}^k = (\lambda_k u_k - Au_k)^T \frac{\partial u_k}{\partial c_{ij}} = 0$. Откуда

$$\rho_{ij}^k = u_k^T \frac{\partial A}{\partial c_{ij}} u_k. \tag{4}$$

Обозначим E_{ij} $n \times n$-матрицу, единственным ненулевым элементом которой является элемент i-й строки и j-го столбца, равный 1. Дифференцируя (2) по c_{ij}, получаем уравнение для отыскания $\frac{\partial A}{\partial c_{ij}}$:

$$P^T \frac{\partial A}{\partial c_{ij}} + \frac{\partial A}{\partial c_{ij}} P = -E_{ij}. \tag{5}$$

Это уравнение имеет единственное решение [4. С. 269]. Таким образом, уравнения (4)—(5) позволяют вычислить ρ_{ij}^k, а следовательно, и коэффициенты ρ_{ij} чувствительности функционала $\varphi(A)$ к изменению элемента c_{ij}:

$$\rho_{ij} = \frac{\partial}{\partial c_{ij}} (\lambda_n/\lambda_1) = \frac{\rho_{ij}^n \lambda_1 - \lambda_n \rho_{ij}^1}{\lambda_1^2}, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Рассмотрим теперь множество стационарных систем вида $\dot{x} = (P + R)x$, близких к системе (1) (т. е. $\|R\| \leqslant \varepsilon$). При малых ε сохраняется асимптотическая устойчивость системы [5. С. 103]. При каждом P уравнение Ляпунова

$$P^T A + AP = -E \tag{6}$$

имеет единственное решение $A = A(P) \in \mathbf{M}$ и, таким образом, для матриц A и P, связанных соотношением (6), значения $\varphi(A)$ зависят от P. Зависимость собственного значения λ_k от переменной матрицы $P = [p_{ij}]$ характеризуется матрицей чувствительности $\sigma^k = [\sigma_{ij}^k]$, где $\sigma_{ij}^k = \partial\lambda_k/\partial p_{ij}$ — коэффициент чувствительности λ_k к изменению элемента p_{ij} матрицы P, причем (см. (3)—(4))

$$\sigma_{ij}^k = u_k^T \frac{\partial A}{\partial p_{ij}} u_k. \tag{7}$$

Дифференцируя (6) по p_{ij}, получаем: $E_{ji}A + P^T \frac{\partial A}{\partial p_{ij}} + \frac{\partial A}{\partial p_{ij}} P + AE_{ij} = 0$. Откуда, учитывая симметричность A, получаем уравнение для $\partial A/\partial p_{ij}$:

$$P^T \frac{\partial A}{\partial p_{ij}} + \frac{\partial A}{\partial p_{ij}} P = -(AE_{ij} + (AE_{ij})^T). \tag{8}$$

Таким образом, для нахождения σ_{ij}^k имеем уравнения (8) — (7).

Полученные результаты могут быть использованы для решения задач об экстремальном возмущении функционала $\varphi(A)$ при ограниченных изменениях параметров уравнений (2) и (6).

Замена матрицы C в уравнении (2) матрицей $C+B$ сообщает функционалу $\varphi(A)$ приращение $\Delta_B\varphi(A)$.

Задача. Построить матрицу $B_0 \in \mathbf{B}$ такую, что $\Delta_{B_0}\varphi(A) = \max\limits_{B\in\mathbf{B}} \Delta_B\varphi(A)$.

Приращение функционала $\varphi(A)$, вызванное матрицей B, можно представить в виде

$$\Delta_B\varphi(A) = \sum_{i,\,j=1}^{n} \rho_{ij} b_{ij} + o(\varepsilon). \tag{9}$$

Формула (9) дает возможность выбрать симметричную матрицу $B = B_0 = [b_{ij}^0]$ так, чтобы $\Delta_{B_0}\varphi(A)$ было максимальным с точностью до $o(\varepsilon)$. Построение матрицы B_0 зависит от способа задания нормы матрицы.

Пусть $\|B\| = \sum\limits_{k,\,l=1}^{n} |b_{kl}|$ и пусть $\max\limits_{k,\,l} |\rho_{kl} + \rho_{lk}| = |\rho_{ij} + \rho_{ji}|$. Тогда положим $B_0 = \frac{\varepsilon}{2}(E_{ij} + E_{ji}) \operatorname{sgn}(\rho_{ij} + \rho_{ji})$. Матрица B_0 реализует $\max \Delta_B\varphi(A)$ с точностью до $o(\varepsilon)$. Если max достигается при разных парах (k, l), то B_0 определяется неоднозначно. Полученные при этом $\Delta_B\varphi(A)$ совпадают с точностью до $o(\varepsilon)$.

Добавка R к матрице P сообщает $\varphi(A)$, в силу уравнения (6), приращение

$$\Delta\varphi_R(A) = \sum_{k,\,l=1}^{n} \sigma_{kl} r_{kl} + o(\varepsilon), \tag{10}$$

где $\sigma_{kl} = \frac{\partial}{\partial p_{kl}} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right) = \frac{\sigma_{kl}^n \lambda_1 - \sigma_{kl}^1 \lambda_n}{\lambda_1^2}$, $k, l = 1, \ldots, n$.

Задача. Построить матрицу R_0, $\|R_0\| \leqslant \varepsilon$, такую, что $\Delta\varphi_{R_0}(A) = \max\limits_{\|R\| \leqslant \varepsilon} \Delta\varphi_R(A)$. Построение матрицы R_0, реализующей экстремальное с точностью до $o(\varepsilon)$ отклонение $\Delta\varphi_{R_0}(A)$, может быть сделано с использованием формулы (10) в зависимости от выбора матричной нормы.

Пусть $\|R\| = \sum\limits_{k,\,l=1}^{n} |r_{kl}|$ и пусть $\max\limits_{k,\,l} |\sigma_{kl}| = \sigma_{ij}$. Тогда матрица $R_0 = \varepsilon \cdot E_{ij} \operatorname{sgn} \sigma_{ij}$. Если $\max|\sigma_{kl}|$ достигается более чем на одном элементе, то R_0 определяется неоднозначно. Получаемые при этом $\Delta\varphi_{R_0}(A)$ совпадают с точностью до $o(\varepsilon)$.

Если $\|R\| = n \cdot \max\limits_{k,\,l} |r_{kl}|$, то $r_{kl}^0 = \frac{\varepsilon}{n} \operatorname{sgn} \sigma_{kl}$, $k, l = 1, \ldots, n$, и $R_0 = [r_{kl}^0]$.

Формулы для построения R_0 отличаются от формул для B_0, поскольку не требуется, чтобы R_0 была симметричной.

Список литературы

1. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. М., 1967.
2. Хусаинов Д. Я., Комаров Ю. А., Юнькова Е. А. // Автоматика. 1984. № 6. С. 73.
3. Кастрица О. А. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1987. № 3. С. 77.
4. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М., 1969.
5. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М., 1970.

Поступила в редакцию 23.04.87.