ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ АНАЛИЗА ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ВЕРОЯТНОСТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Ю. В. Меленец

Белорусский Государственный Университет
Минск, Беларусь
E-mail: melene@tut.by

Рассматривается задача оценивания параметров гауссовских случайных процессов с периодическими вероятностными характеристиками по наблюдениям над соответствующей бинарной случайной последовательностью. Приводятся результаты имитационных экспериментов.

Ключевые слова: гауссовский случайный процесс, бинарная последовательность, период, оценивание параметров, метод максимального правдоподобия.

Рассмотрим случайный процесс u_t, $1 \le t \le N$, $u_t \in R$, который порождает случайную последовательность $(X_t,\ 1 \le t \le N)$ по следующему правилу:

$$P(X_t = 1 \mid u_t) = F_t(u_t), \quad P(X_t = 0 \mid u_t) = 1 - F_t(u_t), \tag{1}$$

где $F_t : \mathrm{R} \to [0,1]$ и $F_t(u_t)$ – монотонно неубывающие функции.

Пусть случайные величины $(u_t,\ 1 \le t \le N)$ независимы и распределены при каждом t по гауссовскому закону. Предположим, что математическое ожидание и ковариации процесса u_t ограничены и являются периодическими функциями с $Mu_t = \mu_t$, $Du_t = \sigma_t^2$, $\mu_t = \mu_{t+jT}$, $\sigma_t^2 = \sigma_{t+jT}^2$, $j = 1,2,...$ T – натуральное число, имеющее смысл периода. Период T известен. Кроме того считаем, что $F_t(z)$ – функция распределения нормального закона с известными параметрами (a_t, b).

Задача состоит в том, чтобы выяснить условия, при которых методом максимального правдоподобия можно оценить параметры $\left(\mu_\tau, \sigma_\tau^2,\ 1 \le \tau \le T\right)$ и построить эти оценки.

Разобьем выборку $(X_t,\ 1 \le t \le N)$ на T подвыборок $X^{(\tau)}$, $1 \le \tau \le T$ следующим образом $X^{(\tau)} = \left\{X_{\tau+(l-1)T},\ \middle|\ 1 \le \tau \le T,\ 1 \le l \le N(\tau)\right\}$, где

$$N(\tau) = \begin{cases} \alpha_T + 1, & 1 \le \tau \le \beta_T \\ \alpha_T, & \beta_T + 1 \le \tau \le T \end{cases},$$

а целые числа α_T и β_T определяются соотношением $N = \alpha_T \cdot T + \beta_T$, $0 \le \beta_T < T$. Тогда выборка $X^{(\tau)}$ определяется соотношением (1) , но при этом случайные величины u_t, генерирующие элементы выборки $X^{(\tau)}$, независимы и распределены по гауссовскому закону с параметрами $Mu_t = \mu_\tau$ и $Du_t = \sigma_\tau^2$.

Определим множества $C(0)=(-\infty,0)$ и $C(1)=[0,+\infty)$. Для построения функции правдоподобия воспользуемся следующим фактом [1].

Лемма 1. Пусть бинарный случайный процесс X_t порожден стационарным случайным процессом u_t при помощи соотношения (1). Пусть $(Y_t,\ 1\le t\le N)$ — последовательность независимых между собой случайных величин с функцией распределения $F_t(z)$ и Y_t не зависит от X_m, $1\le k,m\le N$. Определим $V_t=u_t-Y_t$. Тогда для $\{x_1,x_2,...,x_N\}\in\{0,1\}^N$

$$P(X_1=x_1,...,X_N=x_N)=P(V_1\in C(x_1),...,V_N\in C(x_N)).$$

Очевидно, что $(V_t,\ 1\le t\le N)$ – последовательность независимых случайных величин, распределенных при каждом t по нормальному закону с параметрами $\left(\mu_\tau-a_t,\ \sqrt{b^2+\sigma_\tau^2}\right)$. Случайные величины $(X_t,\ 1\le t\le N)$ также независимы и имеют распределение

$$P(X_t=x_t)=p_t^{x_t}(\tau)(1-p_t(\tau))^{1-x_t},$$

где $p_t(\tau)=P(V_t\ge 0)=1-\Phi\left(\dfrac{a_t-\mu_\tau}{\sqrt{b^2+\sigma_\tau^2}}\right)$, а $\Phi(z)$ – функция распределения стандартного нормального закона.

Тогда логарифм функции правдоподобия $l(\mu_\tau,\sigma_\tau)$ оцениваемых параметров имеет вид

$$l(\mu_\tau,\sigma_\tau)=\sum_{t=1}^{N(\tau)}\left(x_t\ln\left(1-\Phi\left(z_t(\tau)\right)\right)+(1-x_t)\ln\Phi\left(z_t(\tau)\right)\right), \qquad (2)$$

где $z_t(\tau)=\dfrac{a_t-\mu_\tau}{\sqrt{b^2+\sigma_\tau^2}}$.

Для максимизации правой части (2) необходимы следующие равенства:

$$\frac{dl(\mu_\tau,\sigma_\tau)}{d\mu_\tau}=\frac{1}{\sqrt{b^2+\sigma_\tau^2}}\sum_{t=1}^{N(\tau)}\left(\frac{x_t}{1-\Phi\left(z_t(\tau)\right)}-\frac{1-x_t}{\Phi\left(z_t(\tau)\right)}\right)\cdot\varphi\left(z_t(\tau)\right);$$

$$\frac{dl(\mu_\tau,\sigma_\tau)}{d\sigma_\tau}=\frac{\sigma_\tau}{b^2+\sigma_\tau^2}\sum_{t=1}^{N(\tau)}\left(\frac{x_t}{1-\Phi\left(z_t(\tau)\right)}-\frac{1-x_t}{\Phi\left(z_t(\tau)\right)}\right)\cdot\varphi\left(z_t(\tau)\right)\cdot z_t(\tau);$$

$$\frac{d^2l(\mu_\tau,\sigma_\tau)}{d\mu_\tau^2}=\frac{1}{b^2+\sigma_\tau^2}\sum_{t=1}^{N(\tau)}\left(\frac{x_t}{1-\Phi\left(z_t(\tau)\right)}-\frac{1-x_t}{\Phi\left(z_t(\tau)\right)}\right)\cdot\varphi\left(z_t(\tau)\right)\cdot z_t(\tau)-$$

$$-\frac{1}{b^2+\sigma_\tau^2}\sum_{t=1}^{N(\tau)}\left(\frac{x_t}{1-\Phi\left(z_t(\tau)\right)}-\frac{1-x_t}{\Phi\left(z_t(\tau)\right)}\right)\cdot\varphi\left(z_t(\tau)\right);$$

$$\frac{d^2l(\mu_\tau,\sigma_\tau)}{d\mu_\tau d\sigma_\tau}=-\frac{\sigma_\tau}{\sqrt{\left(b^2+\sigma_\tau^2\right)^3}}\sum_{t=1}^{N(\tau)}\left(\frac{x_t}{\left(1-\Phi\left(z_t(\tau)\right)\right)^2}-\frac{1-x_t}{\Phi^2\left(z_t(\tau)\right)}\right)\cdot\varphi^2\left(z_t(\tau)\right)\cdot z_t(\tau)+$$

$$+\frac{\sigma_\tau}{\sqrt{\left(b^2+\sigma_\tau^2\right)^3}}\sum_{t=1}^{N(\tau)}\left(\frac{x_t}{1-\Phi\left(z_t(\tau)\right)}-\frac{1-x_t}{\Phi\left(z_t(\tau)\right)}\right)\cdot\varphi\left(z_t(\tau)\right)\cdot(z_t^2(\tau)-1);$$

$$\frac{d^2 l(\mu_\tau,\sigma_\tau)}{d\sigma_\tau^2} = -\frac{\sigma_\tau^2}{\left(b^2+\sigma_\tau^2\right)^2}\sum_{t=1}^{N(\tau)}\left(\frac{x_t}{\left(1-\Phi\left(z_t(\tau)\right)\right)^2} - \frac{1-x_t}{\Phi^2\left(z_t(\tau)\right)}\right)\cdot\varphi^2\left(z_t(\tau)\right)\cdot z_t^2(\tau) +$$

$$+\frac{1}{\left(b^2+\sigma_\tau^2\right)^2}\sum_{t=1}^{N(\tau)}\left(\frac{x_t}{1-\Phi\left(z_t(\tau)\right)} - \frac{1-x_t}{\Phi\left(z_t(\tau)\right)}\right)\cdot\varphi\left(z_t(\tau)\right)\cdot(\sigma_\tau^2 z_t(\tau) + b^2 - 2\sigma_\tau^2)\cdot z_t(\tau),$$

где $\varphi(z)$ – функция плотности распределения стандартного нормального закона.

Имеют место следующие леммы.

Лемма 2. Если для любого значения t, $1 \le t \le N(\tau)$ $a_t \equiv a$ есть константа, то каждая точка (a,σ) линии

$$\frac{\mu_\tau - a}{\sqrt{b^2+\sigma_\tau^2}} = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{N(\tau)}\sum_{t=1}^{N(\tau)} x_t\right)$$

является стационарной точкой.

Доказательство. При $a_t \equiv a$ система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dl(\mu_\tau,\sigma_\tau)}{d\mu_\tau} = 0, \\ \dfrac{dl(\mu_\tau,\sigma_\tau)}{d\sigma_\tau} = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

вырождается в одно уравнение

$$\sum_{t=1}^{N(\tau)}\left(\frac{x_t}{1-\Phi\left(z_t(\tau)\right)} - \frac{1-x_t}{\Phi\left(z_t(\tau)\right)}\right) = 0,$$

которое приводится к виду

$$\frac{1}{N(\tau)}\sum_{t=1}^{N(\tau)} x_t = \Phi\left(\frac{\mu_\tau - a}{\sqrt{b^2+\sigma_\tau^2}}\right),$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Если параметры a_t, $1 \le t \le N(\tau)$ являются постоянными, то не существует единственной оценки максимального правдоподобия параметров (μ_τ,σ_τ).

Лемма 3. Для любых значений параметров (μ_τ,σ_τ) справедливы неравенства

$$\frac{d^2 l(\mu_\tau,\sigma_\tau)}{d\mu_\tau^2} < 0, \qquad \frac{d^2 l(\mu_\tau,\sigma_\tau)}{d\sigma_\tau^2} < 0, \qquad (4)$$

$$\frac{d^2 l(\mu_\tau,\sigma_\tau)}{d\mu_\tau^2}\cdot\frac{d^2 l(\mu_\tau,\sigma_\tau)}{d\sigma_\tau^2} - \left(\frac{d^2 l(\mu_\tau,\sigma_\tau)}{d\mu_\tau d\sigma_\tau}\right)^2 < 0. \qquad (5)$$

Доказательство неравенств (4), (5) производится непосредственными выкладками. Для доказательства неравенства (5) используется неравенство Коши – Буняковского для рядов.

Будем предполагать, не ограничивая общности, что значения a_t, $1 \le t \le N(\tau)$ упорядочены по неубыванию, т.е.

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_{N(\tau)-1} \le a_{N(\tau)},$$

причем хотя бы два из значений различны.

Теорема. Функция $l(\mu_\tau, \sigma_\tau)$, определенная соотношением (2), имеет единственный максимум тогда и только тогда, когда

$$\sum_{t=1}^{N(\tau)} a_t \cdot \sum_{t=1}^{N(\tau)} x_t > N(\tau) \cdot \sum_{t=1}^{N(\tau)} a_t x_t .$$

Доказательство необходимости проводится с использованием следующего неравенства [2]:

$$\sum_{t=1}^{M} s_t \sum_{t=1}^{M} r_t > M \sum_{t=1}^{M} s_t r_t \tag{6}$$

которое выполняется при всех $s_1 \le s_2 \le s_3 \le \ldots \le s_M$ и $r_1 \le r_2 \le r_3 \le \ldots \le r_M$. Неравенство (6) является противоположным, если в одной из последовательностей s_t, или r_t, $1 \le t \le n$ неравенства противоположны. Доказательство достаточности проводится методом от противного.

Решение системы (3) для нахождения оценок параметров (μ_τ, σ_τ) находится только численными методами. Аналитическое исследование свойств оценок, получаемых из системы (3), наталкивается на трудности. Поэтому алгоритм оценивания неизвестных параметров в рассматриваемой модели реализован на ПК, и исследование возможности его применения проводилось методами статистического моделирования. Приведем в качестве примера результаты просчетов с объемами выборок N = 300 и N = 2000. Обработке подвергалось по 50 реализаций. T =2, b^2 = 1. Значения a_t моделировались по равномерному закону на интервале (-1,1). Значения параметров, их оценки и доверительные интервалы с уровнем значимости α=0.05 приведены в таблице 1, анализ данных которой свидетельствует о работоспособности рассматриваемого алгоритма.

Таблица 1

Параметры	$N = 300$		$N = 2000$	
	Оценки	Доверительные интервалы	Оценки	Доверительные интервалы
$\mu_1 = -1$ $\sigma_1^2 = 1$	-0,8672 1.6743	[-1,04, -0,6944] [1,57, 1,7786]	-0,9660 1,3395	[-1,0764, -0,8558] [1,1213, 1,5577]
$\mu_2 = 1$ $\sigma_2^2 = 2$	1,2111 1,3917	[1,0308, 1,3914] [1,1516, 1,6318]	0,9439 2,4712	[0,8488, 1,039] [2,3851, 2,5573]

ЛИТЕРАТУРА

1. *Keenan, D. M.* A time series analysis of binary data / D. M. Keenan // J. of American Statistical Association. 1982. V. 77. № 4. P. 816–821
2. *Харди Г.* Неравенства / Харди Г. М. : Мир, 1986. 268 с.