УДК 517.937

П. П. ЗАБРЕЙКО, Я. В. РАДЫНО

ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК К ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С УХУДШАЮЩИМИ ОПЕРАТОРАМИ

1. Опишем некоторые простые соображения, относящиеся к задаче об отыскании неподвижных точек замкнутого оператора, действующего в полном метрическом пространстве.

Пусть X — такое пространство, A — некоторый, вообще говоря, нелинейный замкнутый в X оператор, $D(A^n)$ $(n=1, 2, \ldots)$ — область определения итерации A^n, $D(A^\infty)$ — множество, на котором определены все итерации A^n $(n=1, 2, \ldots)$ оператора A, $\mathrm{Fix}\, A$ — множество неподвижных точек оператора A. Очевидно, $\mathrm{Fix}\, A \subset D(A^\infty)$.

Пусть далее

$$F(A) = \{x \in D(A^\infty) : \lim_{n, m \to \infty} \rho(A^m x, A^n x) = 0\}. \tag{1}$$

Очевидна

Лемма 1. *Пусть $F(A)$ не пусто. Тогда не пусто и $\mathrm{Fix}\, A$ и, более того, если $x_0 \in F(A)$, то последовательные приближения*

$$x_{n+1} = Ax_n \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{2}$$

сходятся к некоторому $x_* \in \mathrm{Fix}\, A$.

Будем говорить, что два элемента $x_1,\ x_2 \in D(A^\infty)$ эквивалентны, если

$$\lim_{n\to\infty} \rho(A^n x_1,\ A^n x_2) = 0. \tag{3}$$

Нетрудно видеть, что определенное отношение является действительно отношением эквивалентности, и поэтому множество $D(A^\infty)$ распадается на классы эквивалентных друг другу элементов. Очевидна

Лемма 2. *Если $x_1,\ x_2 \in \mathrm{Fix}\, A$ и x_1 и x_2 эквивалентны, то $x_1 = x_2$.*

В условиях классического принципа сжимающих отображений [1], когда A определен на всем пространстве X и удовлетворяет условию сжатия $\rho(Ax,\ Ay) \leqslant q\rho(x,\ y)$ $(q < 1)$, из элементарного неравенства $\rho(A^m x,\ A^n x) \leqslant (q^{m-1} + \ldots + q^{n-1})\,\rho(x,\ Ax)$ $(m > n)$ следует, что $F(A) = X$, а из элементарного соотношения $\rho(A^n x_1,\ A^n x_2) \leqslant q^n \rho(x_1,\ x_2)$, что любые два элемента X эквивалентны; тем самым леммы 1 и 2 в данном случае превращаются в этот принцип. То же справедливо и в условиях принципа обобщенного сжатия М. А. Красносельского [2] и его многочисленных обобщений.

Приведем менее тривиальный пример. Допустим, что для оператора A выполнены условия

$$\rho(A^n x_1,\ A^n x_2) \leqslant M_n \psi(x_1,\ x_2) \quad (x_1,\ x_2 \in D\ (A^\infty)). \tag{4}$$

Здесь ψ—некоторая функция на $D(A^\infty) \times D(A^\infty)$, принимающая, возможно, и бесконечные значения, а M_n—фиксированная последовательность чисел, причем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty$.

Теорема 1. *Пусть для некоторого $x_0 \in X$ справедливо неравенство*

$$\psi(x_0,\ Ax_0) < +\infty. \tag{5}$$

Тогда $x_0 \in F(A)$ и, следовательно, последовательные приближения (2) сходятся к неподвижной точке x_* оператора A. Эта неподвижная точка единственна на множестве

$$M(x_0) = \{x \in D(A^\infty) : \psi(x,\ x_0) < +\infty\}. \tag{6}$$

Доказательство. Действительно, из (4) и (5) следует, что

$$\rho(A^m x_0,\ A^n x_0) \leqslant \sum_{j=n}^{m-1} \rho(A^{j+1}x_0,\ A^j x_0) \leqslant \left(\sum_{j=n}^{m-1} M_j\right) \psi(x_0,\ Ax_0) \quad (m > n),$$

и, следовательно, $x_0 \in F(A)$. Далее в наших условиях любые два элемента x_1 и x_2, для которых $\psi(x_1,\ x_2) < +\infty$, эквивалентны; тем самым $M(x_0)$ состоит из эквивалентных элементов, и поэтому на $M(x_0)$ неподвижная точка единственна.

Теорема 1 может быть усилена, если (4) заменить условием

$$\rho(A^n x_1,\ A^n x_2) \leqslant M_n(r)\, \psi(x_1,\ x_2) \qquad (x_1,\ x_2 \in D(A^\infty),\ \psi(x_1,\ x_2) \leqslant r). \tag{7}$$

Теорема 2. *Пусть для некоторых $x_0 \in D(A^\infty)$ и $r < +\infty$ справедливы соотношения*

$$\psi(x_0,\ Ax_0) \leqslant r, \tag{8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n(r) < +\infty. \tag{9}$$

Тогда $x_0 \in F(A)$ и, следовательно, последовательные приближения (2) сходятся к неподвижной точке x_* оператора A. Эта неподвижная точка единственна на множестве

$$M(x_0) = \{x \in D(A^\infty) : \lim_{n\to\infty} M_n(\psi(x,\ x_0)) = 0\}. \tag{10}$$

2. Ниже вложение $X \subset Y$, где X и Y — банаховы пространства, означает, что X является подмножеством Y и что норма оператора вложения X в Y не превышает 1.

Теорема 3. *Пусть $X_0,\ X_1,\ \ldots,\ X_\infty$ — банаховы пространства, причем либо*

$$X_0 \supset X_1 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots \supset X_\infty, \tag{11}$$

либо

$$X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots \subset X_\infty, \tag{12}$$

$I_\varepsilon = [-\varepsilon,\ \varepsilon]$ и $f(t,\ x)$—отображение, для которого выполняются условия:

а) отображение $f(t, \cdot): X_0 \to X_0$ *в первом случае и отображение* $f(t, \cdot): X_\infty \to X_\infty$ *во втором замкнуто при каждом* $t \in I_\varepsilon$;

б) отображение $f(\cdot, \cdot): X_{n+1} \to X_n$ *в первом случае и отображение* $f(\cdot, \cdot): X_n \to X_{n+1}$ *непрерывно;*

в) при каждом $n = 0, 1, 2, \ldots$ *справедливы неравенства*

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\|_{X_n} \leqslant q_n \| x_1 - x_2\|_{X_{n+1}} \quad (x_1, x_2 \in X_{n+1}) \tag{13}$$

в первом случае и неравенства

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\|_{X_{n+1}} \leqslant q_n \|x_1 - x_2\|_{X_n} \quad (x_1, x_2 \in X_n) \tag{14}$$

во втором.

Тогда:

I) *если при некотором* $\delta > 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta^n q_1 \ldots q_n}{n!} < +\infty, \tag{15}$$

то для любого $x_0 \in X_\infty$ (X_0) *существует непрерывно дифференцируемая функция* $x: I_\delta \to X_0$ (X_∞), *являющаяся решением задачи Коши*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(0) = x_0; \tag{16}$$

II) *если при некотором* $\delta > 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta^{2n} q_1 \ldots q_n}{(2n)!} < +\infty, \tag{17}$$

то для любых $x_0, x_1 \in X_\infty$ (X_0) *существует дважды непрерывно дифференцируемая функция* $x: I_\delta \to X_0$ (X_∞), *являющаяся решением задачи Коши*

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(t, x), \; x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1. \tag{18}$$

Доказательство проведем для случая, когда выполнено условие (11). Задача (15) эквивалентна существованию неподвижной точки у оператора

$$Ax(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))\, ds,$$

а задача (18) — у оператора

$$Bx(t) = x_0 + x_1 t + \int_0^t (t - s) f(s, x(s))\, ds$$

в пространстве $C(I_\delta; X_0)$ непрерывных на I_δ функций со значениями в X_0. Из условий теоремы следует, что

$$\|A^n x_1(t) - A^n x_2(t)\|_{X_0} \leqslant q_1 \ldots q_n \int_0^t \ldots \int_0^{s_1} \| x_1(s) - x_2(s)\|_{X_n} ds \leqslant$$

$$\leqslant q_1 \ldots q_n \int_0^t \ldots \int_0^{s_1} \|x_1(s) - x_2(s)\|_{X_\infty} ds \leqslant \frac{\delta^n q_1 \ldots q_n}{n!} \||x_1 - x_2\||_{C(I_\delta; X_\infty)}.$$

Аналогично

$$\|B^n x_1(t) - B^n x_2(t)\|_{X_0} \leqslant \frac{\delta^{2n} q_1 \ldots q_n}{(2n)!} \||x_1 - x_2\||_{C(I_\delta; X_\infty)}.$$

Применяя теорему 1, где $M_n = (n!)^{-1}\delta^n q_1 \ldots q_n$ или $M_n = ((2n)!)^{-1}\delta^{2n} q_1 \ldots q_n$, получаем требуемое утверждение.

Из условий (15) и (17) видно, что для уравнения первого порядка последовательность q_n в условиях (13) и (14) может расти, как n, а для уравнений второго порядка — как n^2.

В условиях теоремы 3 решения задач Коши (16) и (18), вообще говоря, не обладают ни свойством единственности, ни свойством нелокальной продолжимости. Можно лишь утверждать, что разница между двумя решениями задачи Коши (16) или (18) не содержится в $C(I_\delta; X_\infty)$, если выполнено условие (11), и в $C(I_\delta; X_n)$ ни при каком $n=1, 2, \ldots$, если выполнено условие (12).

Утверждение теоремы 3 можно усилить, если использовать вместо теоремы 1 более сильную теорему 2.

По существу утверждение теоремы 3 для уравнений первого порядка в случае, когда выполнено условие (12), было установлено в [3]; там же рассмотрен частный случай, когда рассматриваемое уравнение является уравнением в частных производных.

Литература

1. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М., 1984.
2. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др. Приближенное решение операторных уравнений. М., 1968.
3. Радыно Я. В. // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 8. С. 1412—1422.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию 21 июля 1986 г.