УДК 517.5

В. Н. РУСАК, И. В. РЫБАЧЕНКО

РАВНОМЕРНАЯ РАЦИОНАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ СОПРЯЖЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В пространстве непрерывных 2π-периодических функций найдены сравнительные порядковые оценки для рациональных приближений взаимно сопряженных в смысле Гильберта функций действительной переменной. Предполагается, что производные аппроксимирующих тригонометрических рациональных функций $r_n(\theta)$ имеют степенной рост относительно n. Доказано, что равномерная рациональная тригонометрическая аппроксимация преобразования Гильберта отличается от равномерной рациональной тригонометрической аппроксимации его плотности лишь на логарифмический множитель ln n, и этот логарифмический множитель не может быть опущен без дополнительных ограничений на плотность. В целом результаты, полученные в данной статье, относятся к теории приближения рациональными функциями с предписанными полюсами.

Ключевые слова: рациональная аппроксимация; рациональная функция; преобразование Гильберта.

In the space of continuous 2π-periodic functions we find comparative order estimates for rational approximations of mutual conjugate in Gilbert sense functions of real variable. It is proposed that the derivatives of trigonometric rational approximants $r_n(\theta)$ increase with power rate relatively n. We prove that uniform rational trigonometric approximation of Gilbert transformation differs from uniform rational trigonometric approximation of its density only by logarithm multiplier ln n under certain conditions for density, and this logarithm multiplier can not be removed without supplementary restrictions for density. The results of this paper are connected in reality with theory of approximation by rational functions with preassigned poles.

Key words: rational approximation; rational function; Gilbert transformation.

Будем рассматривать сингулярные интегралы с ядром Гильберта

$$F(\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta-\varphi}{2}d\theta, \tag{1}$$

понимаемые в смысле главного значения по Коши, где $f(\theta)\in C_{2\pi}\bigcap \mathrm{Lip}_M\alpha$, $0<\alpha\le 1$, и исследовать равномерную аппроксимацию этих интегралов тригонометрическими рациональными функциями. Предположим, что $f(\theta)$ аппроксимируется рациональными функциями $r_n(\theta)=t_n(\theta)/h_n(\theta)$, где $t_n(\theta)$ и $h_n(\theta)$ – тригонометрические полиномы порядка не выше n, причем

$$h_n(\theta)=\prod_{k=1}^{n}\left(1+|w_k|^2-2|w_k|\cos(\theta-\theta_k)\right),\ |w_k|<1, \theta_k=\arg w_k. \tag{2}$$

Непосредственно проверяется, что

$$R_n(\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r_n(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta-\varphi}{2}d\theta \tag{3}$$

есть также рациональная тригонометрическая функция со знаменателем $h_n(\varphi)$ и порядка не выше n. В данной статье ставилась задача в равномерной норме получить неравенство для уклонения $\| F(\varphi)-R_n(\varphi)\|$.

Теорема 1. *Пусть* $f(\theta)\in C_{2\pi}\bigcap \mathrm{Lip}_M\alpha$, $0<\alpha\le 1$, *и существует тригонометрическая рациональная функция* $r_n(\theta)$ *со знаменателем (2) и такая, что*

$$\| f(\theta)-r_n(\theta)\|\le\frac{C_1}{n^{\beta}},\ \alpha\le\beta,\ \left|r_n'(\theta)\right|\le C_2n^{\gamma},\ \gamma\ge 0. \tag{4}$$

Тогда справедливо неравенство

$$\| F(\varphi)-R_n(\varphi)\|\le\frac{C_3}{n^{\beta}}\ln n. \tag{5}$$

Доказательство. Используя (1), (3) и тот факт, что преобразование Гильберта от единицы есть нуль [1], т. е. $\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{ctg}\frac{\theta-\varphi}{2}d\theta=0$, найдем при любом φ

$$\left|F(\varphi)-R_n(\varphi)\right|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\varphi|\le\pi}\left(f(\theta)-r_n(\theta)\right)\operatorname{ctg}\frac{\theta-\varphi}{2}d\theta\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\varphi|\le\pi}\left(f(\theta)-r_n(\theta)-f(\varphi)+r_n(\varphi)\right)\operatorname{ctg}\frac{\theta-\varphi}{2}d\theta\right|=$$

$$=\left|\int\limits_{|\theta-\varphi|\le\delta_n}+\int\limits_{\delta_n<|\theta-\varphi|\le\pi}\right|=\left|I_1+I_2\right|. \tag{6}$$

Учитывая первое из условий (4), будем иметь

$$|I_2|\le\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\delta_n<|\theta-\varphi|\le\pi}\left(|f(\theta)-r_n(\theta)|+|f(\varphi)-r_n(\varphi)|\right)\left|\operatorname{ctg}\frac{\theta-\varphi}{2}\right|d\theta\le$$

$$\le\frac{C_1}{\pi n^{\beta}}\int\limits_{\delta_n<|\theta-\varphi|\le\pi}\left|\operatorname{ctg}\frac{\theta-\varphi}{2}\right|d\theta\le\frac{2C_1}{\pi n^{\beta}}\int\limits_{\delta_n}^{\pi}\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}d\theta\le$$

$$\le\frac{2C_1}{n^{\beta}}\int\limits_{\delta_n}^{\pi}\frac{d\theta}{\theta}=\frac{2C_1}{n^{\beta}}\ln\frac{\pi}{\delta_n}. \tag{7}$$

В свою очередь опираясь на условие Липшица, теорему о среднем и неравенство (4) для производной рациональной функции и выполняя необходимые преобразования, получим

$$\left|I_1\right|\le\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varphi-\delta_n}^{\varphi+\delta_n}\left|f(\theta)-f(\varphi)\right|\cdot\left|\operatorname{ctg}\frac{\theta-\varphi}{2}\right|d\theta+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varphi-\delta_n}^{\varphi+\delta_n}\left|r_n(\theta)-r_n(\varphi)\right|\cdot\left|\operatorname{ctg}\frac{\theta-\varphi}{2}\right|d\theta\le$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varphi-\delta_n}^{\varphi+\delta_n}\frac{M\,|\theta-\varphi|^{\alpha}}{\left|\sin\frac{\varphi-\theta}{2}\right|}d\theta+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varphi-\delta_n}^{\varphi+\delta_n}\left|\frac{r_n'(\xi)(\theta-\varphi)}{\sin\frac{\varphi-\theta}{2}}\right|d\theta\le$$

$$\le\frac{M}{2}\int\limits_{\varphi-\delta_n}^{\varphi+\delta_n}|\theta-\varphi|^{\alpha-1}\,d\theta+\frac{1}{2}\int\limits_{\varphi-\delta_n}^{\varphi+\delta_n}\left|r_n'(\xi)\right|d\theta\le M\int\limits_{0}^{\delta_n}t^{\alpha-1}dt+$$

$$+C_2n^{\gamma}\delta_n=\frac{M}{\alpha}\delta_n^{\alpha}+C_2n^{\gamma}\delta_n. \tag{8}$$

Из соотношений (6)–(8) следует, что

$$\left|F(\varphi)-R_n(\varphi)\right|\le\frac{2C_1}{n^{\beta}}\ln\frac{\pi}{\delta_n}+\frac{M}{\alpha}\delta_n^{\alpha}+C_2n^{\gamma}\delta_n.$$

Полагая $\delta_n=\min\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}},\left(\frac{1}{n}\right)^{\gamma+\beta}\right\}$, найдем отсюда при любом φ:

$$\left|F(\varphi)-R_n(\varphi)\right|\le\frac{2C_1}{n^{\beta}}\ln\frac{\pi}{\delta_n}+\frac{M}{\alpha}\left(\frac{1}{n}\right)^{\beta}+C_2\left(\frac{1}{n}\right)^{\beta}<$$

$$<\frac{C_3}{n^{\beta}}\ln n,$$

и доказательство теоремы 1 закончено.

Без каких-либо дополнительных ограничений на взаимно сопряженные функции $f(\theta)$ и $F(\varphi)$ логарифмический множитель в оценке (5) не может быть опущен. Справедлива, в частности, следующая теорема.

Теорема 2. *Существует функция* $f(\theta)\in C_{2\pi}\bigcap\mathrm{Lip}_1\alpha$, $0<\alpha\le1$ *и рациональная функция* $r_n(\theta)$, *которые удовлетворяют условиям теоремы 1, и выполнено неравенство*

$$\|F(\varphi)-R_n(\varphi)\|\ge\frac{C_0}{n^{\beta}}\ln n.$$

Доказательство. Определим функцию $f(\theta)$ равенством

$$f(\theta)=\min\left\{n^{-\beta},\left|\sin\theta\right|^{\beta}\right\}.$$

В качестве $r_n(\theta)$ возьмем тождественный нуль. Очевидно, что $f(\theta)\in \mathrm{Lip}_1\alpha$, где $\alpha=\min\{\beta,1\}$ и $\| f(\theta)-r_n(\theta)\|=\| f(\theta)\|=\dfrac{1}{n^\beta}$.

Наконец, выполняя необходимые вычисления, получим

$$\| F(\varphi)-R_n(\varphi)\|=\| F(\varphi)\|\geq F(0)=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}d\theta\right|\geq$$

$$\geq\frac{1}{\pi}\left|\int_{\arcsin\frac{1}{n}}^{\pi-\arcsin\frac{1}{n}} f(\theta)\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}d\theta\right|=\frac{1}{\pi}\int_{\arcsin\frac{1}{n}}^{\pi-\arcsin\frac{1}{n}}\frac{1}{n^\beta}\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}d\theta\geq$$

$$\geq\frac{2}{\pi}\frac{1}{n^\beta}\left(\ln n+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{4}\right)\geq\frac{C_0}{n^\beta}\ln n,$$

что и требовалось доказать.

Замечание 1. Неравенства для производных рациональных функций изучались в [2]. В частности, для рациональных функций $r_n(\theta)=t_n(\theta)/h_n(\theta)$ со знаменателями в форме (2) доказано, что из условия $\| r_n(\theta)\|\leq 1$ вытекает мажорантное неравенство для производной

$$|r_n'(\theta)|\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|w_k|^2}{1+|w_k|^2-2|w_k|\cos(\theta-\theta_k)}. \qquad (9)$$

Из (9) следует, что неравенство (4) для производной аппроксимирующей рациональной функции будет заведомо выполнено, если при всех $k=\overline{1,n}$:

$$1-|w_k|\geq\frac{C_4}{n^{\gamma-1}},\ \gamma\geq 1.$$

Разумеется, теорема 1 содержательна и в полиномиальном случае, когда $w_k=0,\ k=\overline{1,n}$, соответственно неравенство (9) переходит в неравенство С. Н. Бернштейна $|r_n'(\theta)|\leq n$.

Замечание 2. Теорема 1 содержит сравнительные оценки рациональных приближений взаимно сопряженных 2π-периодических дифференцируемых функций в случае степенной скорости их убывания. Аналогичные соотношения выполняются и для рациональных приближений взаимно сопряженных 2π-периодических аналитических функций в случае геометрической скорости их убывания.

Замечание 3. Скорость убывания наилучших рациональных тригонометрических приближений $E_n^T(f)$ и $E_n^T(F)$ взаимно сопряженных функций $f(\theta)$ и $F(\varphi)$ в равномерной метрике может иметь одинаковый порядок при дополнительных ограничениях на $f(\theta)$. Так происходит, в частности, для функций $f(\theta)$, имеющих r-ю производную в смысле Вейля ограниченной вариации, $r>0$. Такие функции, как установлено в [3], аппроксимируются рациональными функциями существенно лучше, чем полиномами, причем $E_n^T(f)=O\left(\dfrac{1}{n^{r+1}}\right)$ и для сопряженной функции также выполнено порядковое равенство $E_n^T(F)=O\left(\dfrac{1}{n^{r+1}}\right)$. В иной постановке связи между наилучшими приближениями взаимно сопряженных функций изучались ранее в [4–5].

Авторы выражают благодарность профессору А. А. Пекарскому за полезные замечания во время подготовки статьи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Минск, 1963. С. 99.
2. Русак В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения. Минск, 1979. С. 87.
3. Русак В. Н. Точные порядковые оценки для наилучших рациональных приближений на классах функций, представимых в виде свертки // Мат. сб. 1985. Т. 128 (170). № 4. С. 492.
4. Стечкин С. Б. О наилучшем приближении сопряженных функций тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1956. Т. 20. № 2. С.197.

5. Пекарский А. А. Чебышевские рациональные приближения в круге, на окружности и на отрезке // Мат. сб. 1987. Т. 133 (175). № 1 (5). С. 86.

Поступила в редакцию 28.02.13.

Валентин Николаевич Русак – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики и математической физики.

Игорь Васильевич Рыбаченко – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и математической физики.

УДК 519.4

В. П. КИРЛИЦА

О СТРУКТУРЕ НАСЫЩЕННЫХ *D*-ОПТИМАЛЬНЫХ ПЛАНОВ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Доказано, что для модели множественной линейной регрессии с дисперсией наблюдений, изменяющейся линейно, и контролируемыми переменными $\left|x_{ij}\right| \le 1$ точный *D*-оптимальный план экспериментов достигается, если все $x_{ij} = \pm 1$. Это является обобщением ранее полученного аналогичного результата для модели равноточных наблюдений. Установлено, что структура насыщенных *D*-оптимальных планов для трех равноточных наблюдений намного шире, чем это было известно ранее. Три точки спектра такого плана лежат на одной из шести граней единичного куба, причем две точки – это концы одного и того же ребра, а третья точка – любая точка, лежащая на противоположном ребре той же грани. Множество насыщенных *D*-оптимальных планов экспериментов для трех равноточных наблюдений бесконечно и имеет мощность континуума. Реализация экспериментов по таким планам позволяет проводить эксперименты не на пределе возможных значений факторов, влияющих на эксперимент. Исследована структура насыщенных *D*-оптимальных планов для некоторых линейных моделей неравноточных наблюдений.

Ключевые слова: неравноточные наблюдения; *D*- и *A*-оптимальные планы экспериментов; насыщенные *D*-оптимальные планы; структура насыщенных *D*-оптимальных планов с неравноточными наблюдениями.

For model of linear multiple regressions with variance of observations changing linearly and controllable variables $\left|x_{ij}\right| \le 1$ it is proved that exact *D*-optimal design is obtained by setting $x_{ij} = \pm 1$ for all variables. It is generalization before the received similar result for model of homoscedastic observations. It is established that the structure of saturated *D*-optimal designs for three homoscedastic observations is much wider that is was known earlier. Three points of a spectrum of such design lay on one of six sides of unite cube and two points it is the ends of the same edge and the third point is point laying on an opposite edge of the same side. The set of saturated *D*-optimal designs for linear model with three homoscedastical observations is infinity and have continuum power. Realizations of experiments under such designs allow to make experiments not on a limit of possible values of the factors influencing experiments. The structure of saturated *D*-optimal designs is investigated for some linear models of heteroscedastical observations.

Key words: heteroscedastic observations; *D*- and *A*-optimal designs of experiments; saturated *D*-optimal designs; structure of saturated *D*-optimal designs with heteroscedastic observations.

Введение

Рассмотрим линейную множественную модель наблюдений

$$y_i = \theta_1 x_{1i} + \ldots + \theta_m x_{mi} + \varepsilon(x^{(i)}),\ i = 1, \ldots, n;\ n \ge m, \tag{1}$$

где y_i – наблюдаемые значения; $x^{(i)} = (x_{1i}, \ldots, x_{mi})$ – m-вектор контролируемых переменных, компоненты которого выбираются из интервала $[-1,1]; \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$– m-вектор неизвестных параметров; $\varepsilon(x^{(i)})$ – случайные некоррелированные ошибки наблюдений с нулевым средним и дисперсией

$$D\{\varepsilon(x^{(i)})\} = d_i = a_0 + a_1 x_{1i} + \ldots + a_m x_{mi} > 0 \tag{2}$$

для каждой реализации $x^{(i)}$ из m-мерного единичного куба $\left|x_{ij}\right| \le 1$, $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$. Коэффициенты в (2) удовлетворяют неравенствам: $a_0 > 0, \left|a_1\right| + \ldots \left|a_m\right| < a_0$.

Как известно [1], при фиксированном плане экспериментов ε_n, определяемом матрицей плана экспериментов

$$X = \begin{pmatrix} x_{11}\ x_{21} \ldots x_{m1} \\ \ldots\ \ldots \ldots \ldots \\ x_{1n}\ x_{2n} \ldots x_{mn} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

наилучшая линейная несмещенная оценка $\hat{\theta}$ вектора неизвестных параметров θ для модели наблюдений (1), (2) есть

$$\hat{\theta} = M^{-1} Y, \tag{4}$$

где

$$M = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i} x^{(i)} (x^{(i)})' - \tag{5}$$