

**МНОГОТОЧЕЧНЫЕ СХЕМЫ ПРОДОЛЬНОГО ВАРИАНТА МЕТОДА ПРЯМЫХ
ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

Белорусский государственный университет

Введение

В связи с результатами, достигнутыми в области численного решения систем ОДУ [1], [2], [3], актуальным является построение дифференциально-разностных схем повышенной точности для граничных задач в случае уравнений с частными производными, которые сводят исходную задачу к задаче Коши для системы ОДУ.

Порядок аппроксимации схем, построенных с помощью метода прямых [4] на трехточечном шаблоне, не превосходил $O(h^4)$, поскольку дальнейшее повышение порядка аппроксимации увеличением шаблона разностной схемы приводило к затруднению аппроксимации вблизи границы [5].

В настоящей работе построены схемы повышенного порядка аппроксимации, а также решена проблема аппроксимации вблизи граничных точек для некоторых задач математической физики с одной пространственной переменной. При этом используется интерполирование Эрмита-Биркгофа, а также интерполирование специального вида в приграничных узлах. Работа является дальнейшим развитием идей, предложенных ранее в работах [6], [7], [8].

Принцип построения

Не ограничивая общности в выборе типа уравнений, рассмотрим смешанную краевую задачу для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \mu_0(t), \quad u(1,t) = \mu_1(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (2)$$

Проведем частичную дискретизацию по переменной x : введем сетку узлов $\overline{\omega}_h = (x_i = ih, i = \overline{0, N}, h = 1/N)$, временную переменную t считаем непрерывной. В качестве базисных функций введем известные вспомогательные финитные кусочно-линейные непрерывные функции $E_i^{(3)}(x)$ (3), основное свойство которых отражает соотношение (4) [9]:

$$E_i^{(3)}(x) = \begin{cases} x - x_{i-1}, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ -(x - x_{i+1}), & x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = \overline{1, N-1}, \quad x_i \in \overline{\omega}_h, \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]. \end{cases} \quad (3)$$

$$\frac{1}{h^2} \int_0^1 E_i^{(3)}(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx = \frac{u(x_{i-1},t) - 2u(x_i,t) + u(x_{i+1},t))}{h^2} = u_{xx}^-(x_i,t). \quad (4)$$

Для учета первого граничного условия из (2), выберем вспомогательную функцию $E_0^{(3)}(x)$ в виде:

$$E_0^{(3)}(x) = \begin{cases} -2(x - x_1), & x \in [x_0, x_1], \\ 0, & x \notin [x_0, x_1], \end{cases}$$

при этом
$$\frac{1}{h^2} \int_0^1 E_0^{(3)}(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx = \frac{2u(x_1,t) - 2u(x_0,t)}{h^2} - \frac{2}{h} \frac{\partial u(x_0,t)}{\partial x}.$$

Для построения пятиточечных схем введем непрерывные кусочно-линейные функции:

$$E_0^{(5)}(x) = \alpha_0 E_0^{(3)}(x) + 2\alpha_1 E_1^{(3)}(x),$$

$$E_1^{(5)}(x) = \alpha_1 E_0^{(3)}(x) + \alpha_0 E_1^{(3)}(x) + \alpha_1 E_2^{(3)}(x),$$

$$E_i^{(5)}(x) = \alpha_1 E_{i-1}^{(3)}(x) + \alpha_0 E_i^{(3)}(x) + \alpha_1 E_{i+1}^{(3)}(x), \quad i = \overline{2, N-2},$$

$$E_{N-1}^{(5)}(x) = \alpha_1 E_{N-2}^{(3)}(x) + \alpha_0 E_{N-1}^{(3)}(x),$$

где α_0, α_1 – пока произвольные параметры.

Умножим уравнение (1) на введенные функции и проинтегрируем по x от 0 до 1:

$$\int_0^1 E_0^{(5)}(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dx - \int_0^1 E_0^{(5)}(x) f(x,t) dx = \int_0^1 E_0^{(5)}(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx, \quad (5)$$

$$\int_0^1 E_1^{(5)}(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dx - \int_0^1 E_1^{(5)}(x) f(x,t) dx = \int_0^1 E_1^{(5)}(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx, \quad (6)$$

$$\int_0^1 E_i^{(5)}(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dx - \int_0^1 E_i^{(5)}(x) f(x,t) dx = \int_0^1 E_i^{(5)}(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx, \quad i = \overline{2, N-2}, \quad (7)$$

$$\int_0^1 E_{N-1}^{(5)}(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dx - \int_0^1 E_{N-1}^{(5)}(x) f(x,t) dx = \int_0^1 E_{N-1}^{(5)}(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx. \quad (8)$$

Интегралы в правых частях равенств (5) – (8) вычисляются точно. Они выражаются через конечные разности второго и четвертого порядков:

$$\int_0^1 E_0^{(5)}(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx = -2\alpha_0 h \frac{\partial u(x_0,t)}{\partial x} + (\alpha_0 + 2\alpha_1)(-2u(x_0,t) + 2u(x_1,t)) + \alpha_1(6u(x_0,t) - 8u(x_1,t) + 2u(x_2,t)), \quad (9)$$

$$\int_0^1 E_1^{(5)}(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx = -2\alpha_1 h \frac{\partial u(x_0,t)}{\partial x} + (\alpha_0 + 2\alpha_1)(u(x_0,t) - 2u(x_1,t) + u(x_2,t)) + \alpha_1(-4u(x_0,t) + 7u(x_1,t) - 4u(x_2,t) + u(x_3,t)), \quad (10)$$

$$\int_0^1 E_i^{(5)}(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx = (\alpha_0 + 2\alpha_1)\Delta^2 u(x_{i-1},t) + \alpha_1\Delta^4 u(x_{i-2},t), \quad i = \overline{2, N-2}, \quad (11)$$

$$\int_0^1 E_{N-1}^{(5)}(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx = (\alpha_0 + 2\alpha_1)(u(x_{N-2},t) - 2u(x_{N-1},t)) + \alpha_1(u(x_{N-3},t) - 4u(x_{N-2},t) + 5u(x_{N-1},t)) + \alpha_0 u(x_N,t). \quad (12)$$

Для вычисления интегралов в левых частях равенств (5) – (8) применим, в предположении достаточной гладкости решения, интерполирование функции $y(x,t) := \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ по переменной x . В зависимости от количества узлов применяемого интерполирования получим разные по порядку аппроксимации пятиточечные схемы. Интегралы $\int_0^1 E_i^{(5)}(x) f(x,t) dx, i = \overline{0, N-1}$ можно вычислить либо точно, либо приближенно с необходимой точностью.

Проинтерполируем функцию $y(x,t)$, например, по пяти узлам:

$$y(x,t) = y(x_i + ph, t) = y(x_i, t) + \frac{p}{1!} \frac{\Delta y(x_i, t) + \Delta y(x_{i-1}, t)}{2} + \frac{p^2}{2!} \Delta^2 y(x_{i-1}, t) + \frac{p(p^2 - 1^2)}{3!} \frac{\Delta^3 y(x_{i-1}, t) + \Delta^3 y(x_{i-2}, t)}{2} + \frac{p^2(p^2 - 1^2)}{4!} \Delta^4 y(x_{i-2}, t) + R_4(x, t), \quad (13)$$

где $i = \overline{2, N-2}$, $\Delta^{n+1} y(x_i, t) = \Delta^n y(x_{i+1}, t) - \Delta^n y(x_i, t)$, $n = 1, 2, 3$ – конечная разность $n+1$ порядка, $x = x_i + ph$, $R_4(x, t)$ – остаток интерполирования, разложенный по степеням h [6], [10], [11]. Такое представление остатка поможет распорядиться выбором параметров схемы α_0, α_1 для повышения порядка аппроксимации:

$$R_4(x, t) = R_4(x_i + ph, t) = \frac{h^5}{5!} p \left(p^4 - \frac{2^4 - 1}{3} p^2 + \frac{2^4 - 4}{3} \right) y^{(5)}(x_i, t) + \frac{h^6}{6!} p^2 \left(p^4 - \frac{2^4 - 1}{3} p^2 + \frac{2^4 - 4}{3} \right) y^{(6)}(x_i, t) + \frac{h^7}{7!} p \left(p^6 - \frac{2^6 - 1}{3} p^2 + \frac{2^6 - 4}{3} \right) y^{(7)}(x_i, t) + \frac{h^8}{8!} p^2 \left(p^6 - \frac{2^6 - 1}{3} p^2 + \frac{2^6 - 4}{3} \right) y^{(8)}(x_i, t) + \frac{h^9}{9!} p \left(p^8 - \frac{2^8 - 1}{3} p^2 + \frac{2^8 - 4}{3} \right) y^{(9)}(x_i, t) + O(h^{10}). \quad (14)$$

Вычислим $\int_0^1 E_i^{(5)}(x)y(x,t)dx$, $i = \overline{2, N-2}$, учитывая представления (13), (14):

$$\int_0^1 E_i^{(5)}(x)y(x,t)dx = h^2 \left[(\alpha_0 + 2\alpha_1)y(x_i, t) + \frac{1}{12}(\alpha_0 + 14\alpha_1)\Delta^2 y(x_{i-1}, t) + \frac{1}{240}(18\alpha_1 - \alpha_0)\Delta^4 y(x_{i-2}, t) \right] + \frac{1}{60480}(31\alpha_0 - 190\alpha_1)h^8 y^{(6)}(x_i, t) + O(h^{10}), \quad i = \overline{2, N-2}. \quad (15)$$

Необходимо добавить оставшиеся три уравнения в приграничных узлах x_i , $i=0,1,N-1$ так, чтобы порядок аппроксимации не стал ниже порядка аппроксимации для внутренних узлов. Применим интерполирование Эрмита-Биркгофа [11] функции $y(x,t)$ для вычисления левой части равенств (5), (6), (8).

Интерполяционный полином $P(x,t)$ для функции $y(x,t)$ в приграничном узле x_0 должен удовлетворять условиям:

$$P(x_i, t) = y(x_i, t), \quad i = 0, 1, 2, \quad P^{(k)}(x_0, t) = y^{(k)}(x_0, t), \quad k = 1, 3, 5, 6, 7.$$

Производные $y^{(k)}(x_0, t)$ мы получаем, используя граничные условия и дифференциальное уравнение.

$$\int_0^1 E_0^{(5)}(x)y(x,t)dx = h^2 \left[(\alpha_0 + 2\alpha_1)y(x_0, t) + \frac{1}{12}(\alpha_0 + 14\alpha_1)(-2y(x_0, t) + 2y(x_1, t)) + \frac{1}{240}(18\alpha_1 - \alpha_0)(6y(x_0, t) - 8y(x_1, t) + 2y(x_2, t)) \right] + \left(\frac{3}{20}\alpha_0 - \frac{1}{30}\alpha_1 \right) h^3 y'(x_0, t) + \left(\frac{-1}{180}\alpha_0 + \frac{1}{90}\alpha_1 \right) h^5 y'''(x_0, t) + \left(\frac{1}{1050}\alpha_0 - \frac{1}{225}\alpha_1 \right) h^7 y^{(5)}(x_0, t) + \left(\frac{23}{129600}\alpha_0 - \frac{29}{21600}\alpha_1 \right) h^9 y^{(7)}(x_0, t) + \frac{1}{60480}(31\alpha_0 - 190\alpha_1)h^8 y^{(6)}(x_0, t) + O(h^{10}). \quad (16)$$

Для приграничного узла x_1 интерполяционный полином $P(x,t)$ должен удовлетворять условиям:

$$P(x_1, t) = y(x_1, t), \quad P(x_3, t) = y(x_3, t), \quad P(x_0, t) + P(x_2, t) = y(x_0, t) + y(x_2, t), \quad P^{(k)}(x_0, t) = y^{(k)}(x_0, t), \quad k = 1, 3, 5, 7, \quad P^{(6)}(x_1, t) = y^{(6)}(x_1, t). \quad (17)$$

Следует заметить, что для интерполирования мы применили в качестве условия линейную комбинацию интерполируемых функций.

$$\int_0^1 E_1^{(5)}(x)y(x,t)dx = h^2 \left[(\alpha_0 + 2\alpha_1)y(x_1, t) + \frac{1}{12}(\alpha_0 + 14\alpha_1)(y(x_0, t) - 2y(x_1, t) + y(x_2, t)) + \frac{1}{240}(18\alpha_1 - \alpha_0)(-4y(x_0, t) + 7y(x_1, t) - 4y(x_2, t) + y(x_3, t)) \right] + \left(\frac{11}{60}\alpha_1 + \frac{1}{120}\alpha_0 \right) h^3 y'(x_0, t) + \left(-\frac{1}{120}\alpha_1 + \frac{1}{720}\alpha_0 \right) h^5 y'''(x_0, t) + \left(-\frac{43}{50400}\alpha_1 + \frac{1}{14400}\alpha_0 \right) h^7 y^{(5)}(x_0, t) + \left(-\frac{11}{453600}\alpha_1 + \frac{1}{604800}\alpha_0 \right) h^9 y^{(7)}(x_0, t) + \frac{1}{60480}(31\alpha_0 - 190\alpha_1)h^8 y^{(6)}(x_1, t) + O(h^{10}). \quad (18)$$

Для приграничного узла x_{N-1} интерполяционный полином строится аналогично:

$$P(x_i, t) = y(x_i, t), \quad i = N-3, N-2, N-1, N, \quad P^{(k)}(x_N, t) = y^{(k)}(x_N, t), \quad k = 2, 4, 6, \quad P^{(6)}(x_{N-1}, t) = y^{(6)}(x_{N-1}, t), \quad (19)$$

$$\int_0^1 E_{N-1}^{(5)}(x)y(x,t)dx = h^2 \left[(\alpha_0 + 2\alpha_1)y(x_{N-1}, t) + \frac{1}{12}(\alpha_0 + 14\alpha_1)(y(x_{N-2}, t) - 2y(x_{N-1}, t)) + \frac{1}{240}(18\alpha_1 - \alpha_0)(y(x_{N-3}, t) - 4y(x_{N-2}, t) + 5y(x_{N-1}, t)) \right] + \frac{h^2}{120}(11\alpha_0 + 2\alpha_1)y(x_N, t) - \frac{h^4}{240}(\alpha_0 + 2\alpha_1)y''(x_N, t) + \frac{h^6}{2880}(-\alpha_0 + 10\alpha_1)y^{(4)}(x_N, t) + h^8 \left(-\frac{\alpha_0}{86400} + \frac{\alpha_1}{6300} \right) y^{(6)}(x_N, t) + \frac{1}{60480}(31\alpha_0 - 190\alpha_1)h^8 y^{(6)}(x_{N-1}, t) + O(h^{10}). \quad (20)$$

Производные $y^{(k)}(x_N, t)$ находим, используя граничные условия и дифференциальное уравнение.

Заметим, что главные части остатка для приграничных узлов (16), (18), (20) и внутренних узлов (15) совпадают и равны $\frac{1}{60480}(31\alpha_0 - 190\alpha_1)h^8 y^{(6)}(x_i, t)$, $i = \overline{0, N-1}$.

Приравняем теперь левые и правые части равенств (5) – (8), вычисленные отдельно в (15) – (20) и (9) – (12). Разделив полученные равенства на h^2 и отбросив остаточный член порядка $O(h^6)$, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для приближенного решения $u_i(t)$ на прямых $x=x_i$, $i = \overline{0, N-1}$. Дополнив ее начальными условиями, приходим к задаче Коши, которая аппроксимирует с порядком $O(h^6)$ исходную краевую задачу (1) – (2) для уравнения в частных производных:

$$\left[(\alpha_0 + 2\alpha_1)E + \frac{1}{12}(\alpha_0 + 14\alpha_1)Q + \frac{1}{240}(18\alpha_1 - \alpha_0)Q^2 \right] U' = \frac{1}{h^2} [(\alpha_0 + 2\alpha_1)Q + \alpha_1 Q^2] U + \frac{1}{h^2} F,$$

$$U(0) = \Phi,$$

где $U = (u_0(t), u_1(t), \dots, u_{N-1}(t))^T$ – вектор-столбец приближенного решения; вектор F зависит от $f(x, t)$, параметров α_0, α_1 и граничных условий $\mu_0(t), \mu_1(t)$; $\Phi = (\varphi(x_0), \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_{N-1}))^T$; матрица $Q = \{q_{ij}\}_{i,j=0}^{N-1}$, $q_{ii} = -2$, $q_{ij} = 1$ для $|i-j|=1, i \neq 0, j \neq 1$, $q_{0,1} = 2$, $q_{ij} = 0$ для $|i-j| > 1$.

Выбрав параметры α_0, α_1 так, что $31\alpha_0 - 190\alpha_1 = 0$, мы обнулили главный член остатка для всех уравнений системы и получим остаток порядка $O(h^8)$.

Построение многоточечных схем

Семиточечные схемы позволяют еще более повысить порядок аппроксимации. Вспомогательными функциями в этом случае являются:

$$\begin{aligned} E_0^{(7)}(x) &= \alpha_0 E_0^{(3)}(x) + 2\alpha_1 E_1^{(3)}(x) + 2\alpha_2 E_2^{(3)}(x), \\ E_1^{(7)}(x) &= \alpha_1 E_0^{(3)}(x) + (\alpha_0 + \alpha_2) E_1^{(3)}(x) + \alpha_1 E_2^{(3)}(x) + \alpha_2 E_3^{(3)}(x), \\ E_i^{(7)}(x) &= \alpha_2 E_{i-2}^{(3)}(x) + \alpha_1 E_{i-1}^{(3)}(x) + \alpha_0 E_i^{(3)}(x) + \alpha_1 E_{i+1}^{(3)}(x) + \alpha_2 E_{i+2}^{(3)}(x), \quad i = \overline{2, N-3}, \\ E_{N-2}^{(7)}(x) &= \alpha_2 E_{N-4}^{(3)}(x) + \alpha_1 E_{N-3}^{(3)}(x) + \alpha_0 E_{N-2}^{(3)}(x) + \alpha_1 E_{N-1}^{(3)}(x), \\ E_{N-1}^{(7)}(x) &= \alpha_2 E_{N-3}^{(3)}(x) + \alpha_1 E_{N-2}^{(3)}(x) + (\alpha_0 - \alpha_2) E_{N-1}^{(3)}(x), \end{aligned}$$

Для девятиточечных схем вспомогательные функции имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} E_0^{(9)}(x) &= \alpha_0 E_0^{(3)}(x) + 2\alpha_1 E_1^{(3)}(x) + 2\alpha_2 E_2^{(3)}(x) + 2\alpha_3 E_3^{(3)}(x), \\ E_1^{(9)}(x) &= \alpha_1 E_0^{(3)}(x) + (\alpha_0 + \alpha_2) E_1^{(3)}(x) + (\alpha_1 + \alpha_3) E_2^{(3)}(x) + \alpha_2 E_3^{(3)}(x) + \alpha_3 E_4^{(3)}(x), \\ E_2^{(9)}(x) &= \alpha_2 E_0^{(3)}(x) + (\alpha_1 + \alpha_3) E_1^{(3)}(x) + \alpha_0 E_2^{(3)}(x) + \alpha_1 E_3^{(3)}(x) + \alpha_2 E_4^{(3)}(x) + \alpha_3 E_5^{(3)}(x), \\ E_i^{(9)}(x) &= \alpha_3 E_{i-3}^{(3)}(x) + \alpha_2 E_{i-2}^{(3)}(x) + \alpha_1 E_{i-1}^{(3)}(x) + \alpha_0 E_i^{(3)}(x) + \alpha_1 E_{i+1}^{(3)}(x) + \alpha_2 E_{i+2}^{(3)}(x) + \alpha_3 E_{i+3}^{(3)}(x), \\ & \quad i = \overline{3, N-4}, \\ E_{N-3}^{(9)}(x) &= \alpha_3 E_{N-6}^{(3)}(x) + \alpha_2 E_{N-5}^{(3)}(x) + \alpha_1 E_{N-4}^{(3)}(x) + \alpha_0 E_{N-3}^{(3)}(x) + \alpha_1 E_{N-2}^{(3)}(x) + \alpha_2 E_{N-1}^{(3)}(x), \\ E_{N-2}^{(9)}(x) &= \alpha_3 E_{N-5}^{(3)}(x) + \alpha_2 E_{N-4}^{(3)}(x) + \alpha_1 E_{N-3}^{(3)}(x) + \alpha_0 E_{N-2}^{(3)}(x) + (\alpha_1 - \alpha_3) E_{N-1}^{(3)}(x), \\ E_{N-1}^{(9)}(x) &= \alpha_3 E_{N-4}^{(3)}(x) + \alpha_2 E_{N-3}^{(3)}(x) + (\alpha_1 - \alpha_3) E_{N-2}^{(3)}(x) + (\alpha_0 - \alpha_2) E_{N-1}^{(3)}(x), \end{aligned}$$

Для построения $2k+1$ -точечной схемы используем вспомогательные функции:

$$E_i^{(2k+1)}(x) = \alpha_0 E_i^{(3)}(x) + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j (E_{i-j}^{(3)}(x) + E_{i+j}^{(3)}(x)), \quad i = \overline{k-1, N-k}. \quad (21)$$

В приграничных узлах $i = \overline{0, k-2}$, $i = \overline{N-k+1, N-1}$ используются урезанные функции:

$$E_0^{(2k+1)}(x) = \alpha_0 E_0^{(3)}(x) + 2 \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j E_j^{(3)}(x), \quad (22)$$

$$E_i^{(2k+1)}(x) = \alpha_i E_0^{(3)}(x) + \sum_{j=1}^{k-i-1} (\alpha_{|i-j|} + \alpha_{i+j}) E_j^{(3)}(x) + \sum_{j=k-i}^{k+i-1} \alpha_{|i-j|} E_j^{(3)}(x), \quad i = \overline{1, k-2}, \quad (23)$$

$$E_{N-k+1}^{(2k+1)}(x) = \sum_{j=1}^{2k-2} \alpha_{|k-1-j|} E_{N-j}^{(3)}(x), \quad (24)$$

$$E_{N-i}^{(2k+1)}(x) = \sum_{j=1}^{k-i-1} (\alpha_{|i-j|} - \alpha_{i+j}) E_{N-j}^{(3)}(x) + \sum_{j=k-i}^{k+i-1} \alpha_{|i-j|} E_{N-j}^{(3)}(x), \quad i = \overline{1, k-2}. \quad (25)$$

Умножим исходное уравнение (1) на функции $E_i^{(2k+1)}(x)$, $i = \overline{0, N-1}$ и проинтегрируем по x от 0 до 1. При этом правая часть в матричном виде будет иметь вид (26).

Теорема.

Имеет место равенство:

$$\left\{ \int_0^1 E_i^{(2k+1)}(x) \left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] dx \right\}_{i=0}^{N-1} = \left[\frac{\alpha_0}{2} P_1(Q) + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j P_{j+1}(Q) \right] U + \tilde{F}, \quad k \geq 1. \quad (26)$$

Здесь $P_{j+1}(z) = 2zT_j\left(\frac{z+2}{2}\right)$, где $T_j(x)$ - многочлены Чебышева первого рода, при этом $P_1(z) = 2z$,

$$P_2(z) = z^2 + 2z; \quad N > 2k; \quad \tilde{F}_i = -2\alpha_i h \frac{\partial u(x_0, t)}{\partial x}, \quad i = \overline{0, k-1}; \quad \tilde{F}_i = 0, \quad i = \overline{k, N-k-1}; \quad \tilde{F}_{N-k} = \alpha_{k-1} u(x_N, t);$$

$$\tilde{F}_{N-k+1} = \alpha_{k-2} u(x_N, t), \quad k \geq 2; \quad \tilde{F}_{N-i} = (\alpha_{i-1} - \alpha_{i+1}) u(x_N, t), \quad i = \overline{k-2, 1}, \quad k \geq 3.$$

Доказательство.

Применим метод математической индукции. Из (9) – (12) следует, что при $k = 2$ равенство (26) выполняется. Для $k = 1$ (26) очевидно.

Предположим, что (26) выполняется для $k = m$, $k = m-1$. Тогда, например, для $k = m$ верно:

$$\left\{ \int_0^1 E_i^{(2m+1)}(x) \left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] dx \right\}_{i=0}^{N-1} = \left[\frac{\alpha_0}{2} P_1(Q) + \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j P_{j+1}(Q) \right] U + \tilde{F}. \quad (27)$$

Докажем, что равенство (26) выполняется при $k = m+1$, т.е. докажем, что будет выполняться

$$\left\{ \int_0^1 E_i^{(2m+3)}(x) \left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] dx \right\}_{i=0}^{N-1} = \left[\frac{\alpha_0}{2} P_1(Q) + \sum_{j=1}^m \alpha_j P_{j+1}(Q) \right] U + \tilde{F}. \quad (28)$$

Исходя из формул (21) – (25) очевидно, что базисные функции для $2m+3$ -точечной схемы выражается через базисные функции для $2m+1$ -точечной схемы следующим образом:

$$E_0^{(2m+3)}(x) = E_0^{(2m+1)}(x) + 2\alpha_m E_m^{(3)}(x), \quad (29)$$

$$E_i^{(2m+3)}(x) = E_i^{(2m+1)}(x) + \alpha_m (E_{m-i}^{(3)}(x) + E_{i+m}^{(3)}(x)), \quad i = \overline{1, m-1}, \quad (30)$$

$$E_i^{(2m+3)}(x) = E_i^{(2m+1)}(x) + \alpha_m (E_{i-m}^{(3)}(x) + E_{i+m}^{(3)}(x)), \quad i = \overline{m, N-m-1}, \quad (31)$$

$$E_{N-m}^{(2m+3)}(x) = E_{N-m}^{(2m+1)}(x) + \alpha_m E_{N-2m}^{(3)}(x), \quad (32)$$

$$E_{N-i}^{(2m+3)}(x) = E_{N-i}^{(2m+1)}(x) + \alpha_m (E_{N-i-m}^{(3)}(x) - E_{N-m+i}^{(3)}(x)), \quad i = \overline{m-1, 1}. \quad (33)$$

Таким образом, как следует из (27) – (28) с учетом (29) – (33), нужно доказать, что:

$$2 \int_0^1 E_m^{(3)}(x) \left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] dx = \text{нулевая строка матрицы } P_{m+1}(Q) + \hat{F}_0, \quad (34)$$

$$\int_0^1 (E_{m-i}^{(3)}(x) + E_{i+m}^{(3)}(x)) \left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] dx = i\text{-тая строка матрицы } P_{m+1}(Q) + \hat{F}_i, \quad i = \overline{1, m-1}, \quad (35)$$

$$\int_0^1 (E_{i-m}^{(3)}(x) + E_{i+m}^{(3)}(x)) \left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] dx = i\text{-тая строка } P_{m+1}(Q) + \hat{F}_i, \quad i = \overline{m, N-m-1}, \quad (36)$$

$$\int_0^1 E_{N-2m}^{(3)}(x) \left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] dx = (N-m)\text{-тая строка матрицы } P_{m+1}(Q) + \hat{F}_{N-m}, \quad (37)$$

$$\int_0^1 (E_{N-i-m}^{(3)}(x) - E_{N-m+i}^{(3)}(x)) \left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] dx = (N-i)\text{-тая строка } P_{m+1}(Q) + \hat{F}_{N-i}, \quad i = \overline{m-1, 1}. \quad (38)$$

Здесь $\widehat{F}_i = 0$, $i \neq m, N - m \pm 1$, $\widehat{F}_m = -2h \frac{\partial u(x_0, t)}{\partial x}$, $\widehat{F}_{N-m-1} = u(x_N, t)$, $\widehat{F}_{N-m+1} = -u(x_N, t)$.

Используя рекуррентное соотношение для многочленов Чебышева, получим рекуррентное соотношение для полиномов $P_m(z)$:

$$P_{m+1}(z) = 2zT_m\left(\frac{z+2}{2}\right) = 2z\left(2\left(\frac{z+2}{2}\right)T_{m-1}\left(\frac{z+2}{2}\right) - T_{m-2}\left(\frac{z+2}{2}\right)\right) = (z+2)P_m(z) - P_{m-1}(z), \text{ или}$$

$$P_{m+1}(Q) = (Q+2E)P_m(Q) - P_{m-1}(Q). \quad (39)$$

Матрица $A = Q + 2E = \{a_{i,j}\}_{i,j=0}^{N-1}$ имеет вид: $a_{ij} = 1$ для $|i-j|=1$, $i \neq 0$, $j \neq 1$, $a_{0,1} = 2$, $a_{ij} = 0$ для $|i-j| > 1$.

Тогда с учетом (39) для строк матрицы $P_{m+1}(Q)$ справедливы равенства:

$$\text{нулевая строка матрицы } P_{m+1}(Q) = (\text{первая строка } P_m(Q)) \times 2 - (\text{нулевая строка } P_{m-1}(Q)), \quad (40)$$

$$i\text{-тая строка матрицы } P_{m+1}(Q) = ((i-1)\text{-вая строка } P_m(Q)) + \\ + ((i+1)\text{-вая строка } P_m(Q)) - (i\text{-тая строка } P_{m-1}(Q)), i = \overline{1, N-2}, \quad (41)$$

$$(N-1)\text{-ая строка } P_{m+1}(Q) = ((N-2)\text{-ая строка } P_m(Q)) - ((N-1)\text{-ая строка } P_{m-1}(Q)). \quad (42)$$

В предположении индукции строки матриц $P_i(Q)$, $i = m, m-1$ выражаются из формул (34) – (38) для соответствующих значений i . Тогда, например, формула (40) перейдет в:

$$\text{нулевая строка матрицы } P_{m+1}(Q) = \left(\int_0^1 (E_{m-2}^{(3)}(x) + E_m^{(3)}(x)) \left[\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] dx \right) \times 2 - \\ - \left(2 \int_0^1 E_{m-2}^{(3)}(x) \left[\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] dx \right) = 2 \int_0^1 E_m^{(3)}(x) \left[\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] dx,$$

что доказывает (34), поскольку $\widehat{F}_0 = 0$. Не трудно убедиться, что (35) – (38) верны на основании (40) – (42). Теорема доказана.

Можно показать, что в общем случае, для $2k+1$ - точечной схемы с $2m+1$ узлами интерполирования, $m = \overline{0, k}$, задача Коши, которая аппроксимирует исходную краевую задачу для уравнения в частных производных, имеет вид (43):

$$\left[\sum_{l=0}^m B_l(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}) \cdot Q^l \right] U' = \frac{1}{h^2} \left[\frac{\alpha_0}{2} P_1(Q) + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j P_{j+1}(Q) \right] U + \frac{1}{h^2} F, \quad (43)$$

$$U(0) = \Phi,$$

где $B_l(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}) = \alpha_0 M_0^l + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i M_i^l$, $l = \overline{0, m}$;

$$M_i^0 = 1, M_i^l = \frac{1}{(2l)!} \sum_{j=0}^{l-1} (-1)^j A_j^{l-1} \left[\frac{(i-1)^{2(l-j)+2} - 2i^{2(l-j)+2} + (i+1)^{2(l-j)+2}}{(2(l-j)+1)(2(l-j)+2)} \right], l \neq 0, i = \overline{0, k-1},$$

$$A_0^s = 1, A_s^s = (s!)^2, 0 \leq s \leq m-1, A_j^s = s^2 A_{j-1}^{s-1} + A_j^{s-1}, 0 < j < s.$$

Исследование сходимости

Исследование сходимости схем проводится с помощью логарифмической нормы [12], [13] как в работе [8]. Решение $2k+1$ - точечной схемы с $2k+1$ узлами интерполирования и наилучшим выбором параметров α_i , $i = \overline{0, k-1}$ сходится к решению исходного дифференциального уравнения в частных производных со скоростью порядка $O(h^{4k-0.5})$. Погрешность аппроксимации в этом случае есть величина порядка $O(h^{4k})$.

Спектр задачи

Получающуюся задачу Коши в общем случае можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} A_1 U'(t) = A_2 U(t) + \frac{1}{h^2} F(t), \\ U(0) = \Phi, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} U'(t) = A_1^{-1} A_2 U(t) + A_1^{-1} \frac{1}{h^2} F(t), \\ U(0) = \Phi. \end{cases} \quad (44)$$

Проводя аналогию с формулами компактного численного дифференцирования [14], [15] (для $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$ в случае трехточечной замены), систему ОДУ (44) можно трактовать как дифференциально-разностную схему, полученную с помощью формулы компактного $2k+1$ -точечного численного дифференцирования, и, поэтому, оператор $A_1^{-1}A_2$ есть оператор замены $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$ с соответствующими граничными условиями на $2k+1$ -точечном шаблоне. Отсюда следует, что оператор $A_1^{-1}A_2$ должен быть отрицательно определенным, поэтому параметры α_i , $i = \overline{0, k-1}$, входящие в схему необходимо выбирать из условия отрицательной определенности оператора.

Рассмотрим спектры разностного оператора $(-1)A_1^{-1}A_2$ и дифференциального оператора $(-1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$ на примере задачи $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = 0$, $y(l) = 0$. Собственными значениями являются $\lambda_k = \left(\frac{\pi + 2\pi k}{2l}\right)^2$, $k = \overline{0, N-1}$.

Из рис.1. следует, что с увеличением точности $2k+1$ -точечной схемы ($k \geq 1$) наблюдается приближение спектров дифференциального и разностного операторов.

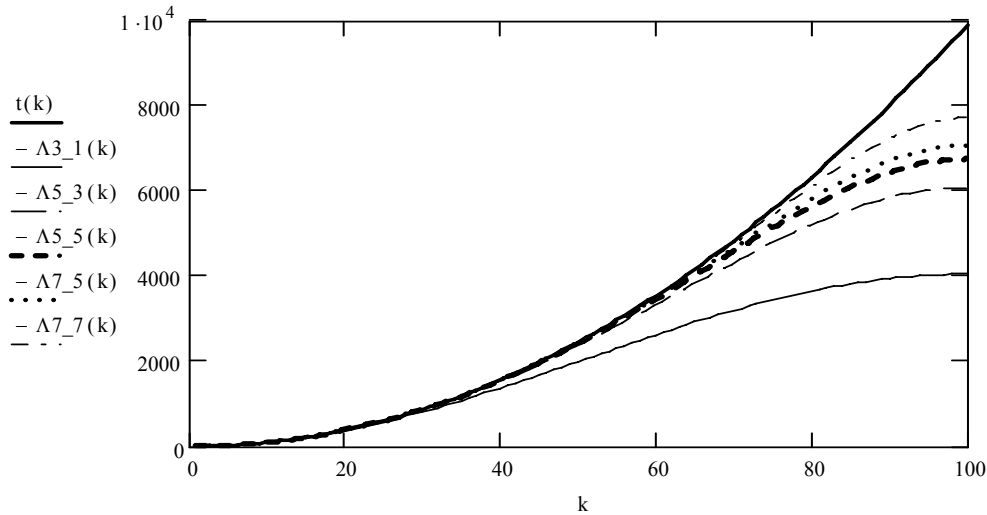


Рис. 1.

где $t(k)$ – собственные значения дифференциального оператора, $\Lambda m_n(k)$ – собственные значения разностного оператора $(-1)A_1^{-1}A_2$, соответствующие m -точечной схеме с применением интерполирования по n узлам.

Вычислительный эксперимент

На примере тестовой задачи (45) с точным решением $u(x,t) = A \sin \alpha x e^{\beta t}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + (\alpha^2 + \beta) A \sin \alpha x e^{\beta t}, \\ u(x,0) = A \sin \alpha x, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = A \alpha e^{\beta t}, \quad u(1,t) = A \sin \alpha e^{\beta t}, \end{cases} \quad (45)$$

проведем сравнение 5-точечной схемы с тремя и пятью узлами интерполирования с известной схемой второго порядка аппроксимации (46) и компактной схемой четвертого порядка аппроксимации (47), дополненными соответствующими уравнениями для приграничных узлов и начальными условиями:

$$u'_i(t) = \frac{u_{i-1}(t) - 2u_i(t) + u_{i+1}(t)}{h^2} + f_i(t), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (46)$$

$$\frac{u'_{i-1}(t) + 10u'_i(t) + u'_{i+1}(t)}{12} = \frac{u_{i-1}(t) - 2u_i(t) + u_{i+1}(t)}{h^2} + \frac{f_{i-1}(t) + 10f_i(t) + f_{i+1}(t)}{12}, \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (47)$$

Для проведения вычислительного эксперимента возьмем, к примеру, $\alpha = \pm 3$, $\beta = -2$, $A = 1$. Погрешности приближенного решения в узлах сетки приведены в табл. 1. Для пятиточечных схем вторые столбцы соответствуют расчетам с оптимальными параметрами α_0 , α_1 , обнуляющими главный член остатка.

X, t = 0.1	Трехточечные схемы		Пятиточечные схемы			
	Второго порядка аппроксими- зации	Четвертого порядка аппроксими- зации	Интерполирование по трем узлам		Интерполирование по пяти узлам	
			$\alpha_0 = -18,$ $\alpha_1 = 1$	$\alpha_0 = 18,$ $\alpha_1 = 1$	$\alpha_0 = -1/31,$ $\alpha_1 = 1/190$	$\alpha_0 = 1/31,$ $\alpha_1 = 1/190$
x=0	$1.7 \cdot 10^{-2}$	$3.7 \cdot 10^{-4}$	$2.3 \cdot 10^{-4}$	$1.6 \cdot 10^{-7}$	$3.4 \cdot 10^{-6}$	$4.35 \cdot 10^{-8}$
x=0.1	$1.7 \cdot 10^{-2}$	$4.1 \cdot 10^{-4}$	$2.7 \cdot 10^{-4}$	$2.8 \cdot 10^{-6}$	$1.1 \cdot 10^{-6}$	$1.16 \cdot 10^{-8}$
x=0.2	$1.9 \cdot 10^{-2}$	$3.6 \cdot 10^{-4}$	$1.0 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-6}$	$1.7 \cdot 10^{-6}$	$2.25 \cdot 10^{-8}$
x=0.3	$2.5 \cdot 10^{-2}$	$3.6 \cdot 10^{-4}$	$2.1 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-6}$	$1.5 \cdot 10^{-6}$	$1.52 \cdot 10^{-8}$
x=0.4	$2.6 \cdot 10^{-2}$	$3.3 \cdot 10^{-4}$	$3.7 \cdot 10^{-4}$	$2.1 \cdot 10^{-6}$	$1.2 \cdot 10^{-6}$	$8.82 \cdot 10^{-8}$
x=0.5	$2.8 \cdot 10^{-2}$	$2.8 \cdot 10^{-4}$	$2.3 \cdot 10^{-4}$	$3.0 \cdot 10^{-6}$	$1.2 \cdot 10^{-6}$	$1.18 \cdot 10^{-8}$
x=0.6	$3.1 \cdot 10^{-2}$	$3.0 \cdot 10^{-4}$	$4.2 \cdot 10^{-4}$	$1.0 \cdot 10^{-6}$	$1.0 \cdot 10^{-6}$	$2.08 \cdot 10^{-8}$
x=0.7	$2.7 \cdot 10^{-2}$	$2.9 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$2.2 \cdot 10^{-6}$	$1.1 \cdot 10^{-6}$	$1.01 \cdot 10^{-8}$
x=0.8	$2.4 \cdot 10^{-2}$	$2.1 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$1.0 \cdot 10^{-6}$	$1.3 \cdot 10^{-6}$	$7.33 \cdot 10^{-8}$
x=0.9	$1.4 \cdot 10^{-2}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$4.3 \cdot 10^{-6}$	$2.8 \cdot 10^{-6}$	$2.82 \cdot 10^{-8}$

Табл. 1.

Известные схемы второго (46) и четвертого (47) порядков аппроксимации являются частным случаем построенных $2k+1$ -точечных схем при $k=1$ с использованием интерполирования по одному и трем узлам соответственно. Из результатов эксперимента видно, что порядок аппроксимации приближенного решения повышается за счет использования схем с большим числом точек и оптимального выбора параметров.

Заключение

Построен класс $2k+1$ -точечных схем ($k \geq 1$) с последовательно улучшающимися свойствами согласованности дифференциальной и разностной задач, с увеличением k , вследствие близости спектров дифференциальных и разностных операторов. Благодаря использованию интерполирования Эрмита-Биркгофа, а также некоторого обобщения интерполирования Эрмита-Биркгофа (17), (19) удалось повысить порядок аппроксимации схемы в приграничных узлах и получить величину $O(h^{4k})$ для $2k+1$ -точечной схемы. Полученный класс схем включает в себя компактные схемы.

Настоящий подход успешно применяется для решения не только параболических, но и гиперболических, а также эллиптических уравнений с граничными условиями различных типов.

Литература

1. Bobkov V. V. // Computational Methods In Applied Mathematics, Vol. 2 (2002), № 4, P. 354 – 377.
2. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. – М.: Мир, 1999.
3. Faleichik V. V. // Computational Methods In Applied Mathematics, Vol.8 (2008), No.2, pp.116–129.
4. Лисковец О.А. // Дифференциальные уравнения, 1965г., т.1, № 12, С. 1662 – 1678.
5. Пинчуков В.И. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1998, т. 38, № 10, С. 1717 – 1720.
6. Огрызко С.В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1: Физ. Мат. Инф., 2006, № 1, С. 79 – 83.
7. Самусенко А.В., Огрызко С.В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1: Физ. Мат. Инф., 2006, № 2, С. 65 – 69.
8. Фролова С.В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1: Физ. Мат. Инф., 2007, № 2, С. 107 – 110.
9. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики, М.: Наука, 1989, С. 81 – 109.
10. Огрызко С.В. // Современные прикладные задачи и технологии обучения в математике и информатике (МоАРМИ-2004): Сб. науч. ст. междунар. конф., Мн., БГУ, 2004, С. 183 – 187.
11. Мысовских И.П. Лекции по методам вычислений, СПб., 1998, С. 50 – 55.
12. Лозинский С.М. // Изв. вузов СССР – Математика, 1958, № 5, С. 52 – 90.
13. Dahlquist G. // Trans. Royal Inst. Tech., Stockhom, Sweden, 1959, No 130.
14. Толстых А.И. Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики, М.: Наука, 1990, С. 48 – 54, С. 117 – 127, С. 153.
15. Гапонов В.А. Компактные разностные аппроксимации повышенного порядка точности в задачах вычислительной гидродинамики. Новосибирск, 1994, С. 5 – 27