ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА МОМЕНТОВ ДЛЯ ЧАСТИЧНОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А. В. Самусенко, С. В. Огрызко

В данной работе приводится метод решения первой краевой задачи для уравнения параболического типа. Практическое значение метода заключается в том, что он сводит решение краевой задачи для дифференциальных уравнений в частных производных к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, при этом можно достичь высокий порядок аппроксимации.

Рассмотрим первую краевую задачу для простейшего однородного уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, 0 < x < 1, 0 < t \le T, (1)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), 0 \le x \le 1,$$

$$u(0,t) = \mu_0(t), 0 \le t \le T,$$

$$u(1,t) = \mu_N(t), 0 \le t \le T.$$

Систему обыкновенных дифференциальных уравнений будем получать путем умножения исходного уравнения на некоторые вспомогательные функции с последующим интерполированием и интегрированием.

Введем сетку узлов $\overline{\omega_h} = \left(x_i = ih, i = \overline{0,N}, h = 1/N\right)$. Временную переменную t считаем непрерывной. Введем вспомогательные кусочно-линейные непрерывные функции $E_i^{(3)}(x)$ [1]:

$$E_i^{(3)}(x) = \begin{cases} x - x_{i-1},\ x \in [x_{i-1}, x_i], \\ -(x - x_{i+1}),\ x \in [x_i, x_{i+1}],\ i = \overline{1, N-1},\ x_i \in \overline{\omega_h}, \\ 0,\ x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]. \end{cases}$$

Основное свойство функции $E_i^{(3)}(x)$, используемое здесь, отражает соотношение:

$$\frac{1}{h^2}\int_0^1 E_i^{(3)}(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}dx=\frac{u(x_{i-1},t)-2u(x_i,t)+u(x_{i+1},t)}{h^2}=u_{\bar{x}x}(x_i,t).$$

1. Пятислойные схемы

Для построения пятислойных схем введем вспомогательные непрерывные кусочно-линейные функции:

$$E_1^{(5)}(x)=\alpha_0 E_1^{(3)}(x)+\alpha_1 E_2^{(3)}(x),$$

$$E_i^{(5)}(x)=\alpha_1 E_{i-1}^{(3)}(x)+\alpha_0 E_i^{(3)}(x)+\alpha_1 E_{i+1}^{(3)}(x),\ i=\overline{2,N-2},$$

$$E_{N-1}^{(5)}(x)=\alpha_1 E_{N-2}^{(3)}(x)+\alpha_0 E_{N-1}^{(3)}(x),$$

где α_0, α_1 - произвольные параметры.

Умножим уравнение (1) на введенные функции и проинтегрируем по x от 0 до 1. Интегралы в правых частях равенств вычисляются точно. Они выражаются через конечные разности второго и четвертого порядков. Для вычисления интегралов в левых частях применим интерполирование функции $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$. В зависимости от вида применяемого интерполирования получим разные по порядку точности пятислойные схемы.

Можно интерполировать по трем или по пяти узлам по формуле Ньютона-Стирлинга для внутренних узлов $i=\overline{2,N-2}$. Для повышения порядка аппроксимации в приграничных узлах необходимо интерполировать функцию $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ специальным образом.

Так, например, если используется интерполирование по пяти узлам по формуле Ньютона-Стирлинга, то в приграничном узле $i=1$ интерполяционный полином $P(x)$ для функции $y(x):=\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ должен удовлетворять условиям:

$$P(x_i)=y(x_i),\ i=\overline{0,3},\ P^{(k)}(x_0)=y^{(k)}(x_0),\ k=2,4,6,\ P^{(6)}(x_1)=y^{(6)}(x_1).$$

Аналогичные требования для узла $i=N-1$.

Производные $y^{(k)}(x_0), y^{(k)}(x_N)$ мы получаем, используя граничные условия и дифференциальное уравнение.

Вычисляя теперь интегралы в левых частях равенств и отбрасывая остаток порядка $O(h^8)$, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Дополнив ее начальными условиями, приходим к задаче Коши, которая аппроксимирует исходную краевую задачу для уравнения в частных производных:

$$h^2\left[(\alpha_0+2\alpha_1)E+\frac{1}{12}(\alpha_0+14\alpha_1)Q+\frac{1}{240}(18\alpha_1-\alpha_0)Q^2\right]U'=$$

$$=\left[(\alpha_0+2\alpha_1)Q+\alpha_1 Q^2\right]U+F\,,$$

$$U(0)=\Phi\,,$$

где U – вектор-столбец решения, матрица $Q=\{q_{ij}\}_{i,\,j=1}^{N-1}$,

$$q_{ii}=-2,\; q_{ij}=1\; для\; |i-j|=1,\; q_{ij}=0\; для\; |i-j|>1\,.$$

За счет выбора параметров можно еще на два порядка повысить точность схемы.

2. Семислойные схемы

Семислойные схемы позволяют еще более повысить порядок аппроксимации. Вспомогательными функциями в этом случае являются:

$$E_1^{(7)}(x)=(\alpha_0-\alpha_2)E_1^{(3)}(x)+\alpha_1 E_2^{(3)}(x)+\alpha_2 E_3^{(3)}(x),$$

$$E_2^{(7)}(x)=\alpha_1 E_1^{(3)}(x)+\alpha_0 E_2^{(3)}(x)+\alpha_1 E_3^{(3)}(x)+\alpha_2 E_4^{(3)}(x),$$

$$E_i^{(7)}(x)=\alpha_2 E_{i-2}^{(3)}(x)+\alpha_1 E_{i-1}^{(3)}(x)+\alpha_0 E_i^{(3)}(x)+\alpha_1 E_{i+1}^{(3)}(x)+\alpha_2 E_{i+2}^{(3)}(x),$$

$$E_{N-2}^{(7)}(x)=\alpha_2 E_{N-4}^{(3)}(x)+\alpha_1 E_{N-3}^{(3)}(x)+\alpha_0 E_{N-2}^{(3)}(x)+\alpha_1 E_{N-1}^{(3)}(x),$$

$$E_{N-1}^{(7)}(x)=\alpha_2 E_{N-3}^{(3)}(x)+\alpha_1 E_{N-2}^{(3)}(x)+(\alpha_0-\alpha_2)E_{N-1}^{(3)}(x),\;\; i=\overline{3,N-3},$$

где α_0, α_1, α_2 - произвольные параметры.

Проведя аналогичные рассуждения, мы построим семислойные схемы с использованием интерполяции по одному, трем, пяти и семи узлам.

Если применяется интерполирование по семи узлам по формуле Ньютона-Стирлинга, то в приграничном узле $i=1$ интерполяционный полином $P(x)$ для функции $y(x):=\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ должен удовлетворять условиям:

$$P(x_i)=y(x_i), i=\overline{0,4},\; P^{(k)}(x_0)=y^{(k)}(x_0),\; k=2,4,6,8,10,$$

$$P^{(m)}(x_1)=y^{(m)}(x_1),\; m=8,10\,.$$

В приграничном узле $i = 2$ –

$P(x_i) = y(x_i), i = 0,2,4,\ P(x_1) + P(x_3) = y(x_1) + y(x_3),$

$P(x_3) + P(x_5) = y(x_3) + y(x_5),$

$P^{(k)}(x_0) = y^{(k)}(x_0),\ k = 2,4,6,8,10,\ P^{(m)}(x_2) = y^{(m)}(x_2),\ m = 8,10.$

Аналогичные требования для узлов $i = N-1, N$.

В итоге приходим к следующей задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, аппроксимирующей исходную краевую задачу для уравнения в частных производных с порядком $O(h^{12})$:

$$h^2\left[(\alpha_0 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2)E + \frac{1}{12}(\alpha_0 + 14\alpha_1 + 50\alpha_2)Q + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{240}(18\alpha_1 - \alpha_0 + 318\alpha_2)Q^2 + \frac{1}{60480}(4094\alpha_2 - 190\alpha_1 + 31\alpha_0)Q^3\right]U' =$$

$$= \left[(\alpha_0 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2)Q + (\alpha_1 + 4\alpha_2)Q^2 + \alpha_2 Q^3\right]U + F,$$

$$U(0) = \Phi.$$

Если теперь выбирать α_0, α_1, α_2 так, чтобы обнулился главный член остатка, то порядок точности повысится до величины $O(h^{14})$.

Для более общего уравнения (1) с коэффициентами, зависящими только от временной переменной t, полученные задачи Коши решаются точно, используя возможность применить преобразование неизвестной функции U с помощью собственных векторов матрицы Q.

Литература

1. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики, М.: Наука, 1989.